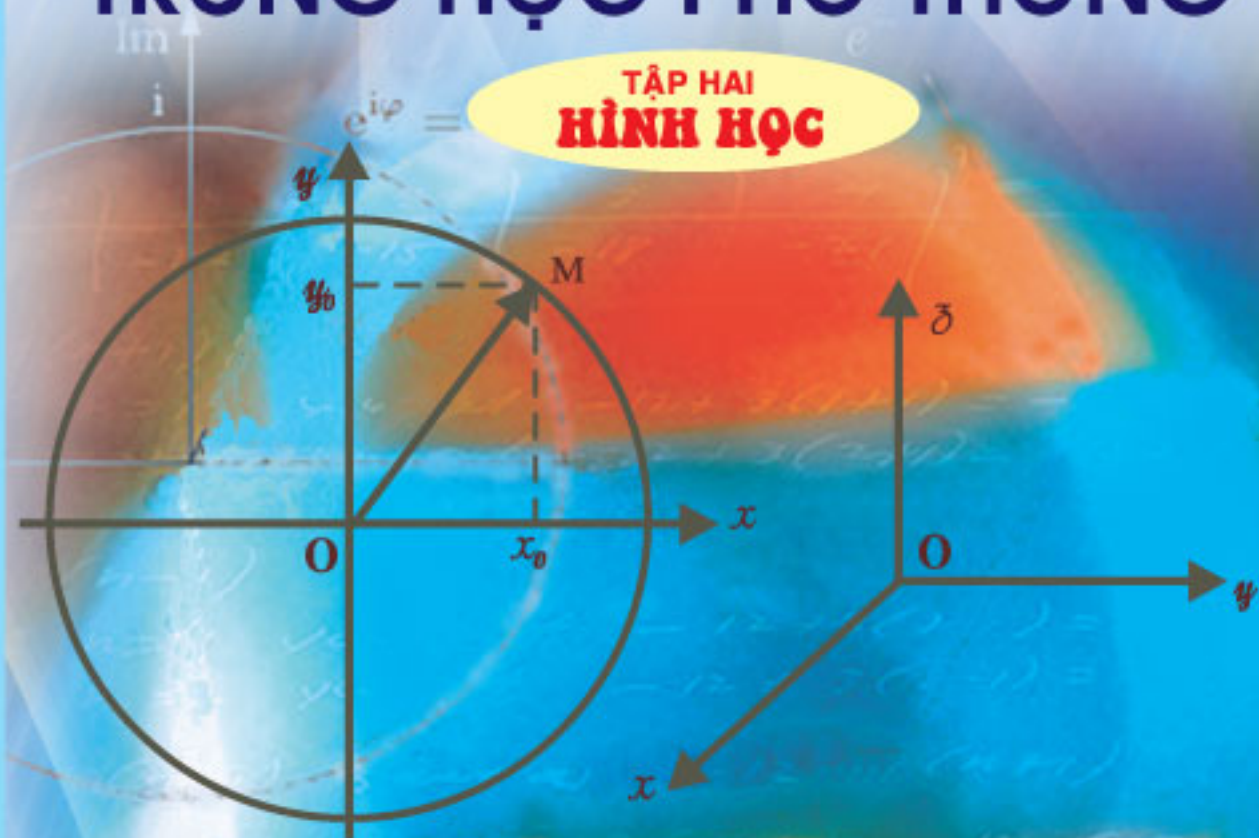


NGUYỄN VINH CẬN - TRẦN LƯU THỊNH

ÔN LUYỆN KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG **MÔN TOÁN** TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

TẬP HAI
HÌNH HỌC



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYEN VĨNH CAN – TRAN LŨU THÒNH

On luyen va kó nang

Mon: TOÁN

TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Tap 2: HÌNH HỌC

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản giáo dục Gia Định –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

Mã số : C3T06M0

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách ***Ôn luyện kiến thức và kỹ năng môn Toán THPT, tập hai – Hình học*** này nằm trong bộ sách ***Ôn luyện kiến thức và kỹ năng môn Toán*** từ Tiểu học đến THPT, gồm bốn cuốn. Nội dung mỗi cuốn sách của bộ sách nhằm hệ thống hoá toàn bộ kiến thức về môn Toán của chương trình môn Toán từ cấp Tiểu học đến cấp Trung học phổ thông, giúp học sinh trong việc nắm vững một cách có hệ thống những kiến thức mới và củng cố, tra cứu lại những kiến thức cũ đã học.

Các cuốn sách “*Ôn luyện kiến thức và kỹ năng môn Toán Tiểu học*” và “*Ôn luyện kiến thức và kỹ năng môn Toán THCS*” đã được xuất bản và phát hành, nay chúng tôi xin được giới thiệu tiếp các cuốn “*Ôn luyện kiến thức và kỹ năng môn Toán THPT*”, gồm hai tập, tập một – Đại số và Giải tích; tập hai – Hình học.

Trong cuốn tập hai này, toàn bộ kiến thức cơ bản và những kỹ năng tối cần thiết của môn Hình học các lớp 10, 11, 12 được hệ thống lại và sắp xếp trong 9 chương để học sinh và bạn đọc dễ sử dụng. Nội dung các chương bao gồm :

- Chương 1. VECTƠ
- Chương 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG
- Chương 3. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG
- Chương 4. CÁC PHEP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẪNG
- Chương 5. NHÓM THANG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN – QUAN HỆ SONG SONG
- Chương 6. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN – QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN
- Chương 7. KHỐI NỬA DIỆN
- Chương 8. MẶT CẦU – MẶT TRỤ – MẶT NÓN
- Chương 9. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Mỗi chương, mục được cấu trúc như sau :

- A. Kiến thức cơ bản
- B. Các bài toán và kỹ năng cơ bản
- C. Bài tập tự luyện

Như vậy, cuốn sách như một cuốn “*Sổ tay tra cứu*”, kèm theo hướng dẫn thực hành, rất phù hợp cho việc rèn luyện giải bài tập toán, củng cố khái niệm, hơn nữa nó lại bao gồm tất cả kiến thức cơ bản, rất thuận tiện cho người học. Các kĩ năng cơ bản được tổng kết theo từng “Chuyên đề”, có phương pháp giải, ví dụ cụ thể, dễ hiểu, dễ áp dụng. Phần *Bài tập tự luyện* được biên soạn có hệ thống, các bài tập từ dễ đến khó hơn, từ áp dụng trực tiếp đến suy luận, vận dụng kiến thức tổng hợp, có hướng dẫn, tự học.

Chính vì vậy, các tác giả hi vọng rằng cuốn sách này là tài liệu quan trọng, là cẩm nang học tập với mọi đối tượng học sinh từ yếu đến khá, giỏi, có thể dùng nó trong quá trình ôn luyện kiến thức THPT, chuẩn bị cho các kì thi tốt nghiệp và thi vào Đại học – Cao đẳng.

Lần đầu tiên viết sách về tổ chức kiến thức và rèn luyện kĩ năng cho mọi đối tượng học sinh, từ trung bình, khá, giỏi đồng thời cũng là tài liệu tham khảo cho các thầy, cô giáo. Đây cũng là cuốn sách đòi hỏi nhiều về phương pháp, về tri thức tổng hợp Giáo dục học nên sẽ khó tránh khỏi những sai sót, kính mong được bạn đọc góp ý xây dựng.

Thư góp ý xin được gửi về theo địa chỉ :

Ban Biên tập Toán – Tin, Công ty cổ phần DVXB Giáo dục Gia Định – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tại TP. Hồ Chí Minh.

231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh.

CÁC TÁC GIẢ

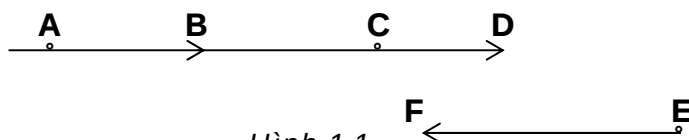
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa vectơ

- Vectơ là một đoạn thẳng định hướng
- Vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

2. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng

- Giá của một vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó
- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau
- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và có cùng hướng thì từ trái sang phải thì ta nói $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EF}$ cùng phương nhưng có hướng ngược nhau thì ta nói $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EF}$ ngược hướng (h.1).



Hình 1.1

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

3. Vectơ bằng nhau

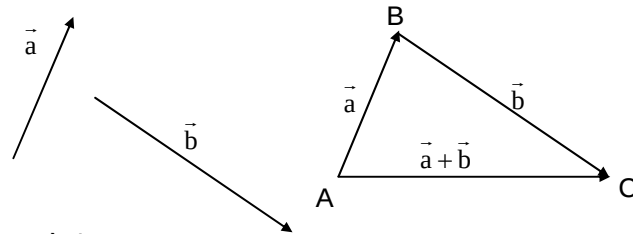
- Mọi vectơ có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Độ dài của $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, nhờ vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *bằng nhau* nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$. Suy ra $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

4. Vectơ - không

– Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Ký hiệu vectơ-không là $\vec{0}$. Chẳng hạn vectơ $\overrightarrow{AA}$, vectơ này nằm trên mọi đường thẳng đi qua A. Ta quy ước vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và cùng quy ước $|\overrightarrow{AA}| = 0$.

5. Tổng của hai vectơ

– Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta ký hiệu tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (h.1.2)



Hình 1.2

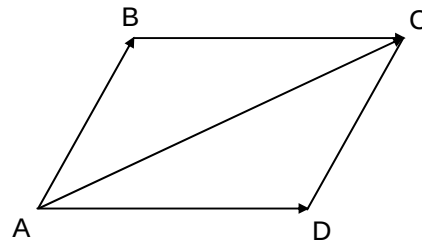
– Phép toán tìm tổng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ còn được gọi là phép cộng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

– Với ba điểm tùy ý M, N, P ta luôn có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

6. Quy tắc hình bình hành

Nếu ABCD là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \quad (\text{h.1.3})$$



7. Tính chất của tổng các vectơ

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta có

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{tính chất giao hoán})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{tính chất kết hợp})$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad (\text{tính chất của vectơ - không})$$

8. Vectơ đối và hiệu của hai vectơ

– Cho vectơ $\vec{a}$. Vectơ có cùng hướng và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$. Mọi vectơ đều có vectơ đối, chẳng hạn vectơ $\overrightarrow{AB}$ có vectơ đối là vectơ $\overrightarrow{BA}$, nhờ vậy $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Vectơ đối của $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

– Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$. Vậy $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

9. Tích của một số với một vectơ

Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Quy ước $0.\vec{a} = \vec{0}$, $k.\vec{0} = \vec{0}$.

10. Tính chất tích của một số với một vectơ

Với mọi vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với mọi số h và k , ta có

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

$$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$$

$$1.\vec{a} = \vec{a}, (-1).\vec{a} = -\vec{a}.$$

Áp dụng

a) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

b) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

11. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

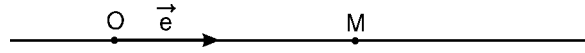
12. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

13. Trục và tọa độ trên trục

a) *Trục tọa độ* (hay gọi tắt là *trục*) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là *điểm gốc* và một vectơ đơn vị $\vec{e}$.

Ta ký hiệu trục là $(O; \vec{e})$



b) Cho M là một điểm tùy ý trên trục $(O; \vec{e})$. Khi đó có duy nhất một số k sao cho $\vec{OM} = k\vec{e}$. Ta gọi số k đó là *tọa độ* của điểm M đối với trục đã cho.

c) Cho hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{e})$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\vec{AB} = a\vec{e}$. Ta gọi số a đó là *đại số* của vectơ $\vec{AB}$ đối với trục đã cho và ký hiệu $a = \overline{AB}$.

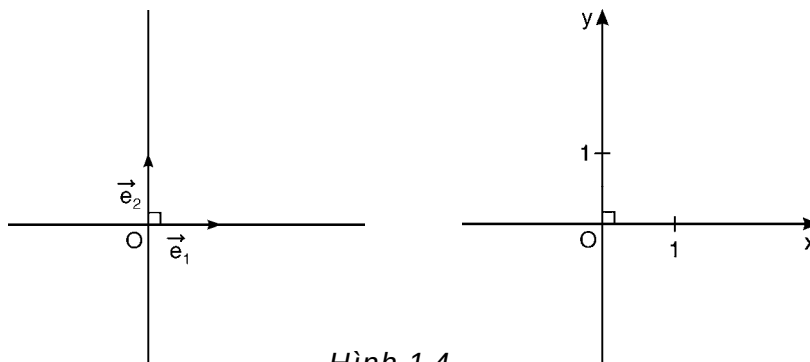
- Nếu $\vec{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = AB$, còn nếu $\vec{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = -AB$.

- Nếu hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{e})$ có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$.

14. Hệ trục tọa độ

a) *Định nghĩa*

Hệ trục tọa độ $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ gồm hai trục $(O; \vec{e}_1)$ và $(O; \vec{e}_2)$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là *gốc tọa độ*. Trục $(O; \vec{e}_1)$ được gọi là *trục hoành* và còn ký hiệu là Ox , trục $(O; \vec{e}_2)$ được gọi là *trục tung* và còn ký hiệu là Oy . Hệ trục tọa độ $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ còn ký hiệu là Oxy (h.1.4).



Hình 1.4

Mặt phẳng mà trên nó đã cho một hệ trục tọa độ Oxy được gọi là *mặt phẳng tọa độ Oxy* hay gọi tắt là *mặt phẳng Oxy*.

Chú ý. Ngẫu nhiên ta còn dùng hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ gồm hai trục $(O; \vec{i})$ và $(O; \vec{j})$ vuông góc với nhau thay cho hệ trục tọa độ $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

b) Tọa độ của vectơ

Trong mặt phẳng Oxy cho một vectơ $\vec{u}$ tùy ý. Khi đó có duy nhất một cặp số $(u_1; u_2)$ sao cho $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$.

Ta gọi cặp số $(u_1; u_2)$ đó là *tọa độ của vectơ* $\vec{u}$ với hệ trục tọa độ Oxy và viết $\vec{u} = (u_1; u_2)$ hoặc $\vec{u}(u_1; u_2)$. Số thứ nhất u_1 gọi là *hoành độ*, số thứ hai u_2 gọi là *tung độ* của vectơ $\vec{u}$.

$$\vec{u} = (u_1; u_2) \Leftrightarrow \vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$$

Chú ý. Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi các tọa độ tổng ứng của chúng bằng nhau.

Nếu $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{u}' = (u'_1; u'_2)$ thì

$$\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u'_1 \\ u_2 = u'_2 \end{cases}$$

Mọi vectơ khác không đều có tọa độ xác định khi biết tọa độ của nó.

c) Tọa độ của một điểm

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho một điểm M tùy ý. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ với hệ trục Oxy được gọi là *tọa độ của điểm M* với hệ trục đó.

Nhờ vậy, cặp số $(x; y)$ là toạ độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (x; y)$. Khi đó ta viết $M(x; y)$. Số x được gọi là *hoành độ*, còn số y được gọi là *tung độ* của điểm M . Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M , tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M .

d) *Liên hệ giữa toạ độ của điểm và toạ độ của vectơ trong mặt phẳng*

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

15. Toạ độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$

Cho $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$. Khi đó:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$$

$$k\vec{u} = (ku_1; ku_2), k \in \mathbb{R}.$$

Chu ý. Hai vectơ $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho $u_1 = kv_1$ và $u_2 = kv_2$.

16. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng. Toạ độ trọng tâm của tam giác

a) Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Toạ độ trung điểm

$I(x_I; y_I)$ của đoạn thẳng AB được tính theo công thức:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

b) Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Khi đó toạ độ trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC được tính theo công thức:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

B. CÁC BÀI TOÁN VÀ KỸ NĂNG CƠ BẢN

Bài toán 1. Xác định một vectơ. Chứng minh hai vectơ bằng nhau

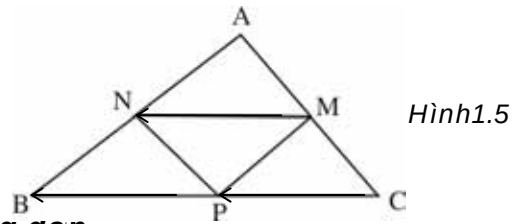
Phương pháp

Muốn chứng minh hai vectơ bằng nhau ta có thể

- Dùng định nghĩa: chứng minh hai vectơ cùng hướng, cùng độ dài;
- Dùng tính chất hình bình hành;
- Chứng minh hai vectơ cùng bằng một vectơ thứ ba.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB và BC. Hãy chứng tỏ rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CP}$.

Hướng dẫn



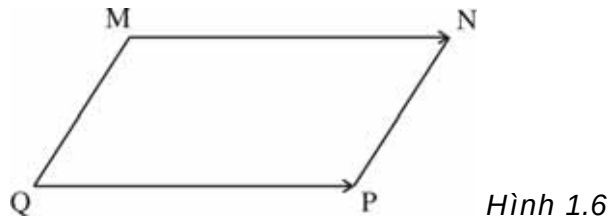
Đặt thay MN là trung bình của tam giác ABC. Trước tiên cả ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PB}$ và $\overrightarrow{CP}$ cùng hướng vì giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Mặt khác do tính chất trung bình của tam giác ta có $MN = PB = CP = \frac{1}{2}BC$. Từ đó, theo định nghĩa vectơ bằng nhau suy ra nhiều phải chứng minh (h.1.5).

Ví dụ 2. Cho tứ giác MNPQ. Hãy chứng tỏ nếu tứ giác MNPQ là hình bình hành thì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Ngược lại, nếu trong tứ giác MNPQ ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ thì MNPQ có trở thành hình bình hành hay không?

Hướng dẫn

Nếu tứ giác MNPQ là hình bình hành thì $MN \parallel QP$ và $MN = QP$ (h.1.6), từ đó suy ra hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{QP}$ cùng hướng và cùng độ dài nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

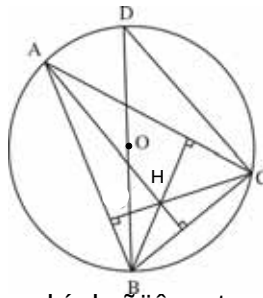
Ngược lại, giả sử trong tứ giác MNPQ ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, từ định nghĩa bằng nhau của hai vectơ ta có $MN \parallel QP$ và $MN = QP$, từ đó ta khẳng định được tứ giác MNPQ là hình bình hành.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC trọng tâm H, nối tiếp trung tuyến tron tâm O. Gọi D là điểm đối xứng với B qua O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

Hướng dẫn

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên ta có (h.1.7):



Hình 1.7

$AH \perp BC$ (1). BD là đường kính đường tròn (O) nên $DC \perp BC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AH \parallel DC$. Tương tự ta cũng suy ra $CH \parallel DA$. Từ đó suy ra tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Theo kết quả ví dụ 2 ở trên ta suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

Bài toán 2. Xác định phương, chiều dài một vectơ

Phương pháp

Khi nào cho một vectơ trên một hình nào đó, để tính chiều dài vectơ ta thông thường nối với một hình có thể xác định được yêu cầu như:

- tam giác đều, tam giác vuông ;
- hình vuông, hình thoi.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. So sánh phương, chiều dài và chiều dài của các vectơ $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn

Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

Từ đó ta có các kết luận sau:

- Hai vectơ $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.
- Hai vectơ $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng.
- $|\overrightarrow{NM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ hay $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{NM}|$.

Ví dụ 2. Cho hình thoi ABCD cạnh a có góc nhọn $A = 60^\circ$. Tính chiều dài của các vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ theo a.

Hướng dẫn

Ta đã biết trong tam giác đều cạnh a thì chiều cao của nó là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, vậy từ đó ta suy ra $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$ và $|\overrightarrow{BD}| = a$.

Bài toán 3. Tìm tập hợp điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ

Phương pháp

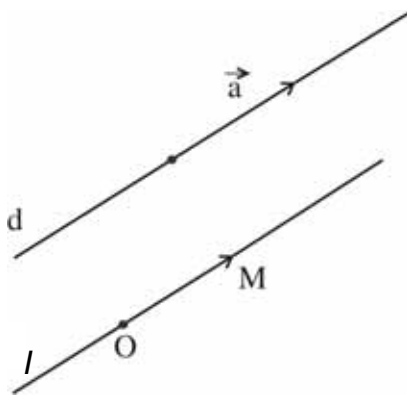
Xác định yêu cầu không liên quan đến số chuyển động của điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ nhờ tọa độ hay phương của vectơ.

Ví dụ 1. Tìm tập hợp điểm ngọn của các vectơ có điểm gốc là O có hình cho trước và cùng phương với vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ cho trước.

Hướng dẫn

Gọi d là giá của $\vec{a}$. Các vectơ có gốc O cùng phương với $\vec{a}$ có điểm ngọn nằm trên đường thẳng l đi qua O và song song với d (h.1.8).

Ngược lại, lấy một điểm M bất kỳ trên l . Khi đó vectơ $\overrightarrow{OM}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$.



Hình 1.8

Vậy tập hợp điểm ngọn của các vectơ có điểm gốc là O có hình cho trước và cùng phương với vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ cho trước là đường thẳng l đi qua O và song song với đường thẳng d .

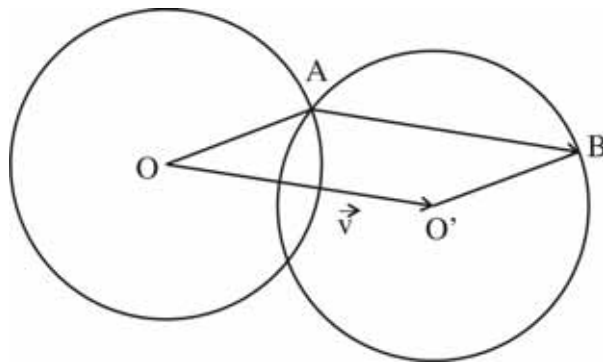
Ví dụ 2. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tìm tập hợp điểm ngọn của các vectơ bằng vectơ $\vec{a}$ có điểm gốc chạy trên một đường tròn cho trước.

Hướng dẫn

Phan thuan. Giả sử quỹ đạo tròn cho trước có tâm O bán kính R . Từ O ta dựng vectơ $\vec{v} = \vec{a}$. Gọi điểm ngọn của vectơ $\vec{v}$ là O' . Vậy O' là điểm có hình. Từ điểm A trên quỹ đạo tròn tâm O , dựng vectơ $\vec{u} = \vec{a}$. Gọi điểm ngọn của vectơ $\vec{u}$ là B . Khi đó tứ giác $OO'BA$ là hình bình hành (theo hình học hai vectơ bằng nhau) nên $O'B = OA = R$ không đổi. Do đó B nằm trên quỹ đạo tròn tâm O' bán kính R (h.1.9).

Phan nao. Lấy một điểm B' bất kỳ trên quỹ đạo tròn tâm O' . Dựng điểm A' sao cho $OO'B'A'$ là hình bình hành. Khi đó $OA' = O'B' = R$. Nhờ vậy A' nằm trên quỹ đạo tròn tâm O . Theo hình học vectơ bằng nhau ta có $\vec{w} = \vec{A'B'} = \vec{OO'} = \vec{a}$.

Vậy tập hợp điểm ngọn của các vectơ bằng vectơ $\vec{a}$ có điểm gốc chạy trên quỹ đạo tròn tâm O có bán kính R cho trước là quỹ đạo tròn tâm O' bán kính R với $\vec{OO'} = \vec{a}$.



Hình 1.9

Bài toán 4. Vectơ - không

Phương pháp

Muốn chứng minh một vectơ nào đó, chẳng hạn vectơ $\vec{AB} = \vec{0}$ ta có thể chứng minh:

- Điểm A trùng với điểm B , hay
- $|\vec{AB}| = 0$.

Ví dụ. Cho hình bình hành ABCD. Tô nhên A hay đồng vectơ $\overrightarrow{AM}$ sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$. Tiếp nối, đồng vectơ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$.

Hướng dẫn

Hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng phương (vì ABCD là hình bình hành) nên $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{NP}$ cùng phương. Đồng thời $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{BA}|$ (hai cạnh đối của hình bình hành) suy ra $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{NP}|$. Do đó tứ giác AMNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau). Tổng của hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$ cùng phương và có độ dài bằng nhau. Tứ giác MNPQ cũng là hình bình hành. Lại có PA và PQ cùng song song với MN nên trùng nhau. Đồng thời, do $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{PQ}|$ và $PA = MN$ (do AMNP là hình bình hành) suy ra $PA = PQ$. Do đó $A \equiv Q$. Vậy $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$.

Bài toán 5. Tính độ dài của vectơ tổng và vectơ hiệu

Phương pháp

- Gán vectơ với các hình đã biết cách tính độ dài của các cạnh, chẳng hạn: tam giác vuông, tam giác đều, hình chữ nhật, hình thoi...
- Dùng tính chất của tổng và hiệu các vectơ.

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn

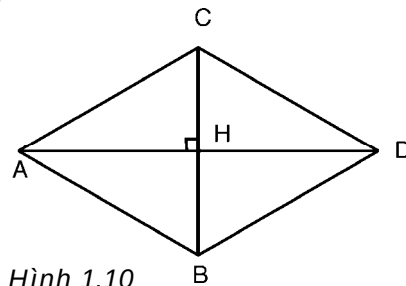
Theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (h.1.10). Do vậy, $AD = 2AH$.

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = a\sqrt{3}$.

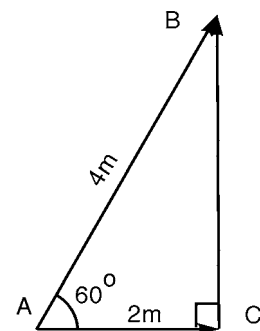
Ví dụ 2. Cho tam giác vuông ABC có $AB = 4\text{m}$, $AC = 2\text{m}$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn

Ta biết tam giác đều có chân vuông cao chia đôi cạnh này. Nhờ vậy, tam giác ABC đã cho là nửa tam giác đều (h.1.11).



Hình 1.10



$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}. \text{ Vay } |\overrightarrow{CB}| = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (m).}$$

Hình 1.11

Bài toán 6. Chứng minh đẳng thức vectơ

Phương pháp

Sử dụng các tính chất của các phép tính cộng, trừ và phép nhân vectơ với một số và sử dụng định nghĩa hai vectơ bằng nhau (cùng hướng, độ dài bằng nhau).

Ví dụ 1. Cạnh BC của tam giác ABC có trung điểm là M. Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}.$$

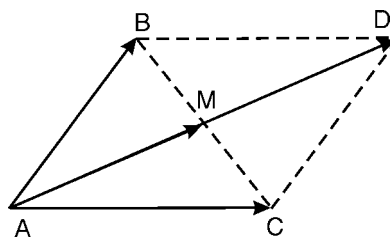
Hướng dẫn

Bài toán có hai cách giải (h.1.12)

Cách 1. Dùng quy tắc ba điểm của phép cộng vectơ.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= \overbrace{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}}^{=\overrightarrow{AB}} + \overbrace{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}}^{=\overrightarrow{AC}} \\ &= 2\overrightarrow{AM} + \underbrace{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}_{=\vec{0}} \end{aligned}$$

Hình 1.12



Cách 2. Đặt thay tam giác ABC là một nửa của hình bình hành nếu coi cạnh BC với trung điểm M là một đường chéo.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM}.$$

Ví dụ 2. Tam giác ABC có trọng tâm là G. Chứng minh rằng với M tùy ý

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = \\ &= 3\overrightarrow{MG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{=\vec{0}} = 3\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

Bài toán 7. Chứng minh hai đường thẳng song song hoặc ba điểm thẳng hàng

Phương pháp

Nếu chứng minh hai đường thẳng song song hoặc ba điểm thẳng hàng, ta sử dụng chung một phương pháp:

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$, k là một số.

trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đồng thời là những vectơ khác phương của hai đường thẳng, hoặc đồng thời là hai vectơ nào đó có một hoặc ba điểm khác cho.

Ví dụ: Cho tam giác ABC. Hai điểm M và N thỏa mãn đẳng thức

$$\vec{MC} - \vec{MB} + \vec{MA} = \vec{0} \text{ và } \vec{NA} + \vec{NB} - 3\vec{NC} = \vec{0}$$

a) Chứng minh M, B và G thẳng hàng, với G là trọng tâm của tam giác.

b) Chứng minh $\vec{MN}$ cùng phương với $\vec{AC}$.

Hướng dẫn

a) $\vec{MC} - \vec{MB} + \vec{MA} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\vec{MG} + \vec{GC}) - (\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{GA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MG} + \underbrace{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}}_{=\vec{0}} - 2\vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MG} = 2\vec{GB}.$$

Vậy M, G và B thẳng hàng.

b) $\vec{MC} - \vec{MB} + \vec{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}$ (1)

$$\vec{NA} + \vec{NB} - 3\vec{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{NA} + \vec{NA} + \vec{AB} - 3(\vec{NA} + \vec{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} + \vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}$ hay $2\vec{AC} = \vec{MN}$.

Vậy $\vec{MN}$ cùng phương với $\vec{AC}$.

Bài toán 8. Chứng minh hai điểm trùng nhau

Phương pháp

Hai điểm A và B trùng nhau khi và chỉ khi $\vec{AB} = \vec{0}$.

Ví dụ. Các cạnh AB, BC, CD và DA của tứ giác ABCD có các trung điểm lần lượt là M, N, P và Q. Chứng minh rằng trọng tâm của hai tam giác ANP và CMQ trùng nhau.

Hướng dẫn

Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ANP và CMQ. Ta có

$$3\vec{G_1G_2} = \vec{G_1M} + \vec{G_1Q} + \vec{G_1C}.$$

Sử dụng công thức vectơ cho trung điểm ta có

$$\overrightarrow{G_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1B} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{G_1Q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1D}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do ño} \quad 3\overrightarrow{G_1G_2} &= \overrightarrow{G_1M} + \overrightarrow{G_1Q} + \overrightarrow{G_1C} = \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1B} + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1C} \\ &= \overrightarrow{G_1A} + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{G_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1D}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{G_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{G_1B}\right) \\ &= \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1P} + \overrightarrow{G_1N} = \vec{0}. \end{aligned}$$

nen $\overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0}$. Vay $G_1 \equiv G_2$.

Bai toan 9. Tìm toa ño của mot ñiem, toa ño của mot vectô

Phöông pháp

Ñe tìm toa ño của mot ñiem $M(x; y)$ hay mot vectô $\vec{m} = (x; y)$ ta thöông tìm nhöng he thöc vectô cho phép ta lap mot he phöông trình ma hai an lai toa ño $(x; y)$. Cac he thöc nay thöông ñöc chia thanh hai loai:

Loai 1: Vectô bang nhau $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

Loai 2: Vectô cung phöông $\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

vöi $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$.

Löu y: A, B, C thang hang $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví du. Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; 4)$. Tìm toa ño của vectô

a) $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; b) $\vec{n} = 4\vec{a} - \vec{b}$.

Höông ñan

a) $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 2.(1) + 3.(3) \\ m_2 = 2.(2) + 3.(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 11 \\ m_2 = 16 \end{cases}$

Vay $\vec{m} = (11; 16)$.

b) Töông tö ta coi $\vec{n} = (1; 4)$.

Bai toan 10. Toa ño cac ñiem ñac biet của tam giac

Phöông pháp

- G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

- I là tâm nội tiếp tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có A(-3; 6), B(9; -10), C(-5; 4).

a) Tìm tọa độ trọng tâm G, tâm I nội tiếp tam giác và trực tâm H của tam giác ABC.

b) Biết H có tọa độ là H(-5; 4). Chứng minh I, G, H thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-3+9-5}{3} = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{6-10+4}{3} = 0 \end{cases}$

Vậy trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

$I(x; y)$ là tâm nội tiếp tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + (y-6)^2 = (x-9)^2 + (y+10)^2 \\ (x+3)^2 + (y-6)^2 = (x+5)^2 + (y-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x - 32y = 136 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy nội tiếp tam giác ABC có tâm I(3; -2).

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có A(1; -1), B(5; -3), nằm C trên Oy và trọng tâm G trên Ox. Tính tọa độ của C.

Hướng dẫn

Vì C nằm trên Oy nên ta đặt $C(0; y)$, ta có G là trọng tâm tam giác ABC