

NGUYỄN KHẮC AN - ĐỖ CÔNG ĐOÁN
LÊ THỊ THIÊN HƯƠNG - TRẦN LƯU THỊNH - HỒ LỘC THUẬN

ÔN LUYỆN KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG **MÔN TOÁN** TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

TẬP MỘT
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN KHÁC AN - ĐỖ CÔNG ĐOÁN
LÊ THỊ THIÊN HƯƠNG - TRẦN LƯU THỊNH - HỒ NGỌC THUẬN

ÔN LUYỆN
KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG
MÔN TOÁN
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

**Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản giáo dục Gia Định —
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.**

Mã số : C3T04M0

LỜI NÓI NỮA

Cuốn sách *Ôn luyện kiến thức và kĩ năng môn Toán THPT, tập một — Đại số và Giải tích* này nằm trong bộ sách *Ôn luyện kiến thức và kĩ năng môn Toán* từ Tiểu học đến THPT, gồm bốn cuốn. Nội dung mỗi cuốn sách của bộ sách này nhằm hệ thống hoá toàn bộ kiến thức về môn Toán của chương trình môn Toán từ cấp Tiểu học đến cấp Trung học phổ thông, giúp học sinh trong việc nắm vững một cách có hệ thống những kiến thức mới và củng cố, tra cứu lại những kiến thức cũ đã học.

Các cuốn sách “*Ôn luyện kiến thức và kĩ năng môn Toán Tiểu học*” và “*Ôn luyện kiến thức và kĩ năng môn Toán THCS*” đã được xuất bản và phát hành, nay chúng tôi xin được giới thiệu tiếp các cuốn “*Ôn luyện kiến thức và kĩ năng môn Toán THPT*”, gồm hai tập, tập một — Đại số và Giải tích; tập hai — Hình học.

Trong cuốn tập một này, toàn bộ kiến thức cơ bản và những kĩ năng tối cần thiết của môn Đại số và Giải tích các lớp 10, 11, 12 được hệ thống lại và sắp xếp trong 8 chương để học sinh và bạn đọc dễ sử dụng. Nội dung các chương bao gồm :

- Chương 0 : Kiến thức cơ bản về lượng giác, lũy thừa, lôgarit
- Chương 1 : Đẳng thức, phương trình, hệ phương trình
- Chương 2 : Bất đẳng thức, bất phương trình
- Chương 3 : Hàm số và khảo sát hàm số
- Chương 4 : Đại số mệnh đề
- Chương 5 : Đại số tổ hợp và xác suất
- Chương 6 : Số phức
- Chương 7 : Nguyên hàm và tích phân.

Mỗi chương, mục được cấu trúc như sau :

- A. Kiến thức cơ bản
- B. Kỹ năng cơ bản
- C. Bài tập tự luyện
- D. Hướng dẫn và đáp số

Như vậy, cuốn sách như một cuốn “*Sổ tay tra cứu*”, kèm theo hướng dẫn thực hành, rất phù hợp cho việc rèn luyện giải bài tập toán, củng cố khái niệm, hơn nữa nó lại bao gồm tất cả kiến thức cơ bản, rất thuận tiện cho người học. Các kỹ năng cơ bản được tổng kết theo từng “Chuyên đề”, có phương pháp giải, ví dụ cụ thể, dễ hiểu, dễ áp dụng mà lại rất cơ bản. Phần *Bài tập tự luyện* được biên soạn có hệ thống, các bài tập từ dễ đến khó hơn, từ áp dụng trực tiếp đến suy luận, vận dụng kiến thức tổng hợp, có hướng dẫn, tự học.

Chính vì vậy, các tác giả hi vọng rằng cuốn sách này là tài liệu quan trọng, là cẩm nang học tập với mọi đối tượng học sinh từ yếu đến khá, giỏi, có thể dùng nó trong quá trình ôn luyện kiến thức THPT, chuẩn bị cho các kì thi tốt nghiệp và thi vào Đại học — Cao đẳng.

Lần đầu tiên viết sách về tổ chức kiến thức và rèn luyện kỹ năng cho mọi đối tượng học sinh, từ trung bình, khá, giỏi và các thầy, cô giáo, bạn đọc khác vẫn tham khảo tốt được, đòi hỏi nhiều về phương pháp, về tri thức tổng hợp Giáo dục học ; chắc rằng cuốn sách khó tránh khỏi những sai sót, kính mong được bạn đọc góp ý xây dựng.

Thư góp ý xin được gửi về theo địa chỉ :

Ban Biên tập Toán — Tin, Công ty cổ phần DVXB Giáo dục Gia Định — Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tại TP. Hồ Chí Minh.

231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh.

CÁC TÁC GIẢ



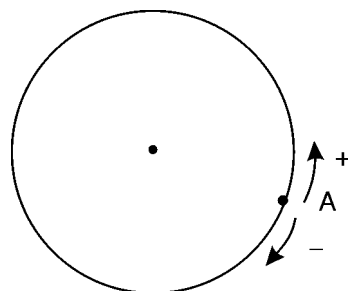
KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ LƯỢNG GIÁC, LŨY THỪA VÀ LÔGARIT

0.1 GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

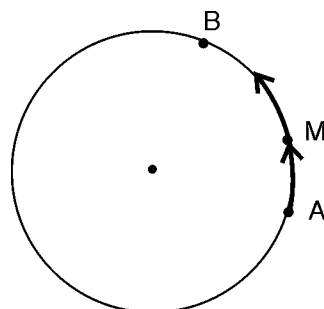
1) Đường tròn định hướng và cung lượng giác

– Đường tròn định hướng là một đường tròn mà trên đó ta đã chọn chiều chuyển động để đi từ điểm này đến điểm kia của đường tròn, còn gọi là chiều quay từ điểm này đến điểm kia. Ta quy ước chiều dương là chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ, chiều ngược lại là chiều âm (hình 1).



Hình 1

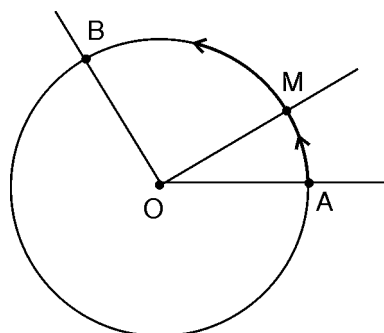
– Cung lượng giác AB là một cung trên đường tròn định hướng tạo bởi một điểm M di động trên đường tròn luôn theo một chiều từ điểm A đến điểm B cho trước, điểm A gọi là điểm đầu (điểm gốc), điểm B gọi là điểm cuối (điểm ngọn) của cung lượng giác AB . Chú ý rằng khi cho trước các điểm A và B trên đường tròn định hướng sẽ có vô số cung lượng giác với điểm đầu là A , điểm cuối là B và đều được kí hiệu là $\widehat{AB}$ (hình 2).



Hình 2

2) Góc lượng giác và đường tròn lượng giác

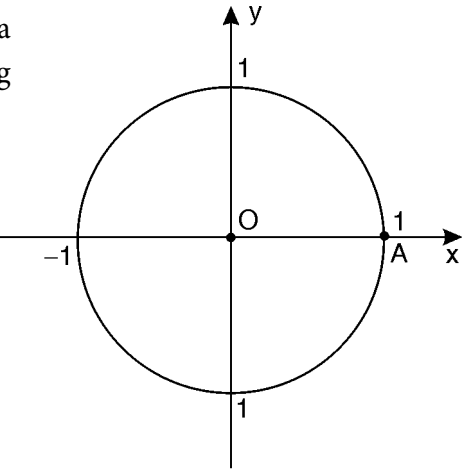
– Trên đường tròn định hướng tâm O , ứng với một cung lượng giác $\widehat{AB}$, khi điểm M chuyển động trên đường tròn từ A đến B thì đồng thời tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OA tới vị trí OB , ta nói tia OM tạo ra một góc lượng giác, có tia đầu là OA và tia cuối là OB , người ta



Hình 3

kí hiệu góc lượng giác đó là (OA, OB). Như thế ta luôn có sự tương ứng một – một giữa cung lượng giác và góc lượng giác (hình 3).

– Đường tròn lượng giác (còn gọi là đường tròn đơn vị) là đường tròn định hướng có bán kính bằng 1, có tâm trùng với gốc toạ độ của mặt phẳng toạ độ Oxy. Trên đường tròn ấy, ta luôn lấy điểm A(1; 0) làm điểm gốc của đường tròn đó (hình 4).



Hình 4

3) Số đo của cung và góc lượng giác

– Số đo của cung lượng giác là số đo của góc lượng giác tương ứng. Số đo của cung lượng giác và của góc lượng giác có thể mang dấu âm và về trị tuyệt đối có thể lớn hơn 360° (hay 2π), đây là điểm khác biệt giữa “góc lượng giác” và “góc hình học”.

– Ngoài số đo bằng “độ”, người ta còn dùng số đo bằng “radian” (đọc là ra-đi-an).

– 1 radian (1 rad) là số đo của cung lượng giác có độ dài bằng bán kính đường tròn ấy, như thế cung nửa đường tròn có số đo là π radian, viết là π rad.

– Quan hệ giữa số đo “độ” và “radian”

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{rad} ; 1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

Bảng chuyển đổi số đo của một số góc lượng giác đặc biệt

Độ	– 30°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
radian	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π

– Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π hay một bội của 360°.

4) Giá trị lượng giác của một cung

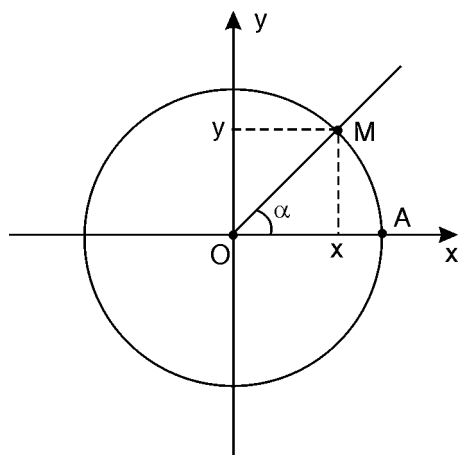
– Giả sử trên đường tròn lượng giác cho cung $\widehat{AM}$ có số đo bằng α, tia cuối OM cắt đường tròn lượng giác tại điểm M, giả sử toạ độ của M = (x; y) (hình 5) :

+ sin của α , kí hiệu là $\sin\alpha$, là tung độ của điểm M, như vậy $\sin\alpha = y$.

+ cosin của α , kí hiệu là $\cos\alpha$, là hoành độ của điểm M, như vậy $\cos\alpha = x$.

+ tang của α , kí hiệu là $\tan\alpha$, là tỉ số giữa tung độ và hoành độ của điểm M, như vậy $\tan\alpha = \frac{y}{x}$.

+ cotang của α , kí hiệu là $\cot\alpha$, là tỉ số giữa hoành độ và tung độ của điểm M, như vậy $\cot\alpha = \frac{x}{y}$.



Hình 5

Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của cung α .

– Các giá trị lượng giác của một cung có các tính chất sau :

+ với mọi α thì $|\sin\alpha| \leq 1$; $|\cos\alpha| \leq 1$

+ $\tan\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

+ $\cot\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

– Dấu của các giá trị lượng giác của một cung (xem bảng):

Góc phần tư \ Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–

– Giá trị lượng giác của một số cung đặc biệt (xem bảng) :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	– 1	0

$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0	$\parallel$	0
$\cot\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\parallel$	0	$\parallel$

– Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt :

Hai góc đối nhau : α và $-\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

Hai góc bù nhau : α và $\pi - \alpha$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

Hai góc phụ nhau : α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$

Hai góc hơn kém nhau π

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

Hai góc hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$$

– Vài hệ thức lượng cơ bản :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq k\pi; \quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2} \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

B. KĨ NĂNG CƠ BẢN

1) Phân biệt góc lượng giác và góc hình học

Phương pháp

Góc α	Xác định	Chiều quay	Đơn vị đo	Số đo – độ lớn
Góc hình học	Phần mặt phẳng giới hạn bởi hai tia cùng xuất phát từ một điểm – gắn với một hình hình học	Không phân biệt chiều quay giữa hai tia	Độ $1^\circ = \frac{1}{360}$ góc đầy hoặc $1^\circ = \frac{1}{180}$ góc bẹt	$0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
Góc lượng giác	Phần mặt phẳng giới hạn bởi hai tia cùng xuất phát từ một điểm – gắn với một cung lượng giác, với đường tròn định hướng	Phân biệt tia đầu, tia cuối, chiều quay từ tia đầu đến tia cuối (ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương, ngược lại là chiều âm)	Độ và radian 1 radian (1 rad) là số đo của cung lượng giác có độ dài bằng bán kính đường tròn. $1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17'$	Là một số thực, dấu của nó tương ứng với chiều quay từ tia đầu đến tia cuối ; các góc có cùng tia đầu, tia cuối hơn kém nhau bội số của 2π

Ví dụ

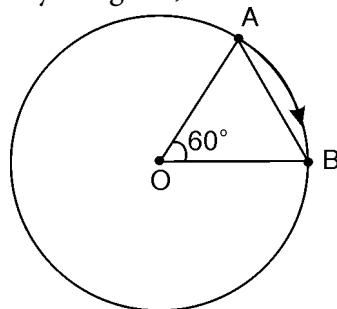
a) Cho đường tròn tâm O và hai điểm A và B trên đường tròn sao cho góc AOB bằng 60° , tính độ dài dây cung AB, biết bán kính đường tròn bằng đơn vị.

b) Cho đường tròn tâm O và hai điểm A và B trên đường tròn sao cho góc AOB bằng 60° , biết rằng tia OM quay từ tia OA đến tia OB cùng chiều kim đồng hồ. Xác định góc lượng giác (OA, OB) và tính độ dài dây cung AB, biết bán kính đường tròn bằng đơn vị.

Giải

a) Dễ thấy tam giác OAB là tam giác đều, vì vậy độ dài dây cung AB bằng bán kính đường tròn, bằng 1.

b) $(OA, OB) = -60^\circ + k.360^\circ$; $AB = 1$. (h.6)



Hình 6

2) Liên hệ giữa độ dài của một cung và số đo bằng radian của nó

Phương pháp

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l = R\alpha$.

Cả đường tròn có số đo 2π rad, độ dài của đường tròn bán kính R là $l = 2\pi R$.

Ví dụ

a) Trên đường tròn có bán kính $R = 30$ cm lấy hai điểm A và B sao cho cung $\widehat{AB}$ có số đo là $\frac{3\pi}{8}$. Tìm độ dài của cung $\widehat{AB}$.

b) Cung $\widehat{MN}$ của một đường tròn bán kính 5m có độ dài là 1m. Hãy tính số đo của cung $\widehat{MN}$.

Giải

a) Gọi độ dài cung $\widehat{MN}$ là l , ta có $l = R\alpha = 30 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{45\pi}{4} \approx 35,3$ (cm).

b) Giả sử số đo của cung $\widehat{MN}$ là α rad, từ công thức $l = R\alpha$ ta có

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{1}{5} \text{ (rad)}.$$

3) Đổi “độ” ra “radian” và ngược lại

Phương pháp

Vận dụng công thức đổi độ thành radian và ngược lại

$$A^\circ = \frac{\pi \cdot A}{180} \text{ rad} ; \alpha \text{ rad} = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ.$$

Ví dụ

a) Đổi các góc sau đây từ độ thành radian : 25° , 46° , -73° .

b) Đổi các góc sau đây từ radian thành độ : $\frac{1}{5}\text{rad}$, $\frac{2\pi}{5}\text{rad}$, $-\frac{\pi}{5}\text{rad}$.

Giải

$$a) A^\circ = \frac{\pi \cdot A}{180} \text{ rad} \Rightarrow 25^\circ = \frac{\pi \cdot 25}{180} = \frac{5\pi}{36} \text{ (rad)};$$

$$A^\circ = \frac{\pi \cdot A}{180} \text{ rad} \Rightarrow 46^\circ = \frac{\pi \cdot 46}{180} = \frac{23\pi}{90} \text{ (rad)};$$

$$A^\circ = \frac{\pi \cdot A}{180} \text{ rad} \Rightarrow -73^\circ = -\frac{\pi \cdot 73}{180} = -\frac{73\pi}{180} \text{ (rad)}.$$

$$\text{b) } \alpha \text{ rad} = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^{\circ} \Rightarrow \frac{1}{5} \text{ rad} = \left(\frac{1 \cdot 180}{5 \cdot \pi} \right)^{\circ} = \left(\frac{36}{\pi} \right)^{\circ} \approx 11^{\circ} 28';$$

$$\alpha \text{ rad} = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^{\circ} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} \text{ rad} = \left(\frac{2\pi \cdot 180}{5 \cdot \pi} \right)^{\circ} = 72^{\circ};$$

$$\alpha \text{ rad} = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^{\circ} \Rightarrow -\frac{\pi}{5} \text{ rad} = -\left(\frac{\pi \cdot 180}{5 \cdot \pi} \right)^{\circ} = -36^{\circ}.$$

4) Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Phương pháp

– Nắm chắc khái niệm đường tròn lượng giác, lấy điểm A(1; 0) làm điểm gốc của các cung lượng giác, chiều quay ngược kim đồng hồ là chiều dương, các cung lượng giác có chung điểm cuối với điểm đầu A(1; 0) sai khác nhau bội 2π hoặc bội của 360° .

– Nhớ điểm cuối của một số cung có số đo đặc biệt như $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$

Ví dụ

a) Trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các cung có số đo :

$$\frac{11\pi}{3}, 405^{\circ}, -300^{\circ}.$$

b) Trên đường tròn lượng giác cho cung $\widehat{AB}$ có số đo tương ứng là $\frac{3\pi}{5}; 4,2; -1,5$.

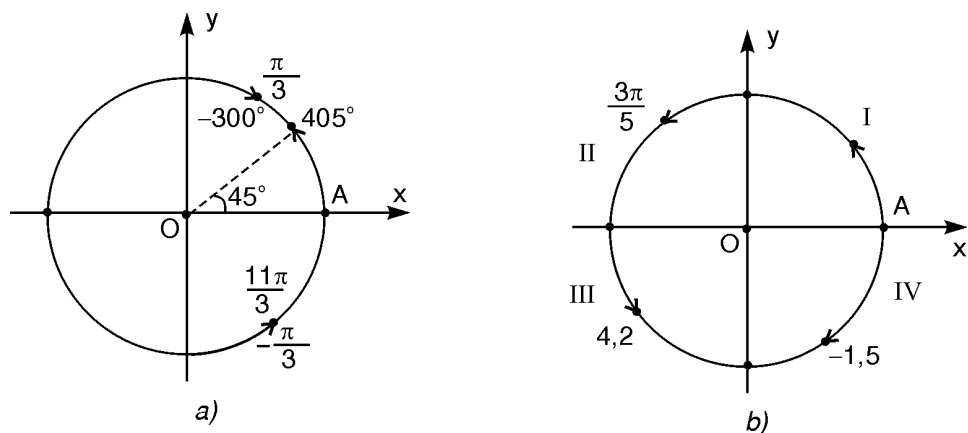
Hãy xác định điểm cuối B nằm ở cung phần tư nào của đường tròn lượng giác ?

Giải

a) Xem hình 7.a), chú ý

$$\frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3}; 405^{\circ} = 360^{\circ} + 45^{\circ}; -300^{\circ} = 60^{\circ} - 360^{\circ}.$$

b) Điểm cuối B của cung $\widehat{AB}$ lần lượt nằm trong các cung phần tư thứ II, III và thứ IV của đường tròn lượng giác (xem hình 7.b)), chú ý $\frac{3\pi}{6} < \frac{3\pi}{5} < \frac{3\pi}{3}$.



Hình 7

5) Xác định giá trị lượng giác của một góc đặc biệt trên đường tròn lượng giác

Phương pháp

- Nắm chắc định nghĩa của giá trị lượng giác của một góc.
- Xác định đúng điểm cuối trên đường tròn lượng giác của góc đặc biệt đó.
- Giải tam giác vuông để tìm ra các giá trị lượng giác của góc đó.

Ví dụ

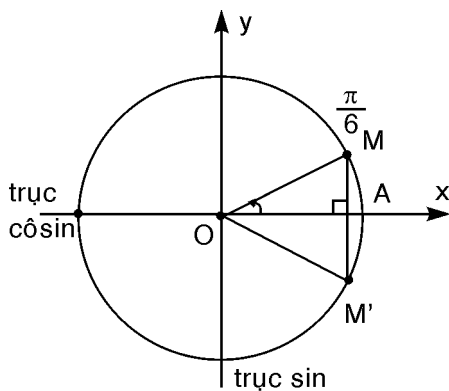
Tính giá trị lượng giác của góc có số đo bằng $\frac{\pi}{6}$.

Giải

Trên hình vẽ ta thấy điểm cuối M của cung $\widehat{AM}$ cùng với điểm M' là điểm đối xứng với M qua trục Ox (trục côsin) và gốc toạ độ O tạo nên một tam giác đều có đường phân giác là OA. Để thấy đường cao của tam giác đều này bằng côsin của góc $\frac{\pi}{6}$ (là hoành độ của điểm M) nên $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, còn sin của góc $\frac{\pi}{6}$ là tung độ của điểm M bằng một nửa

MM' nên $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Từ định nghĩa suy ra

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$



Hình 8

6) Cho trước một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị còn lại

Phương pháp

– Nắm chắc định nghĩa của giá trị lượng giác của một góc và các hệ thức cơ bản.

– Nắm được dấu của các giá trị lượng giác của một cung.

Ví dụ

Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và biết $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính sin, tang và cotang của góc α .

Giải

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha < 0$. Từ công thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra :

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$\text{Vậy } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

7) Chứng minh đẳng thức lượng giác

Phương pháp

Nắm được các hệ thức cơ bản, giá trị lượng giác của những cung có liên quan đặc biệt và các phép biến đổi đại số, biến đổi vế này thành vế kia, vận dụng các điều kiện cho trước (nếu có).

Ví dụ

a) Chứng minh rằng
$$\frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$$

b) Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có $\sin(A+B) = \sin C$.

Giải

a) Từ công thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)} \\ &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}. \end{aligned}$$

b) Trong tam giác ABC ta luôn có $A+B+C = \pi$ suy ra $A+B = \pi - C$, từ đó :

$$\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C, \text{ điều phải chứng minh (đpcm).}$$

8) Sử dụng máy tính bỏ túi để chuyển đổi số đo và tính giá trị lượng giác của một góc

Phương pháp

Dùng máy tính bỏ túi có chức năng thực hiện các phép toán phức tạp, chẳng hạn CASIO fx – 500MS.

Ví dụ

a) Chuyển đổi độ thành *radian* : chuyển $18^{\circ}42'$ thành *radian*.

b) Chuyển đổi *radian* thành độ : chuyển 3,1 rad thành độ.

c) Tính giá trị lượng giác của một góc : $\sin 20^{\circ}36'$ và $\tan \frac{3\pi}{17}$.

Giải

a) Ấn liên tiếp MODE chọn Rad (bấm phím 2) để xuất hiện R phía bên phải phía trên màn hình rồi ấn tiếp 18 o,,, 42 o,,, SHIFT DRG 1 = 0.32637657.

b) Ấn liên tiếp MODE chọn Deg (bấm phím 1) để xuất hiện D phía bên phải phía trên màn hình rồi ấn tiếp 3.1 SHIFT DRG 2 = o,,, được $177^{\circ}37'$.

c)

+ Tính $\sin 20^{\circ}36'$: Ấn MODE ba lần rồi ấn liên tiếp các phím 1 sin 20 o,,, 36 o,,, = được 0,35 (đã làm tròn).

+ Tính $\tan \frac{3\pi}{17}$: Ấn MODE ba lần rồi ấn liên tiếp các phím 2 tan (3 SHIFT $\pi \div$ 17) = được 0,619 (đã làm tròn).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Đổi số đo của các cung sau đây thành **radian**

- a) 13° b) $36^{\circ}12'$ c) -29° d) $-127^{\circ}46'$.

2. Đổi số đo của các cung sau đây thành **độ, phút, giây**

- a) $\frac{\pi}{18}$ b) $-\frac{3\pi}{19}$ c) $-2,5$ d) $\frac{3}{7}$.

3. Kim phút của một chiếc đồng hồ quay từ đúng nửa đêm hôm trước đến 9 giờ sáng ngày hôm sau một góc bao nhiêu độ ?

4. Biểu diễn các cung sau đây trên đường tròn lượng giác :

- a) $\frac{7\pi}{3}$ b) $-\frac{9\pi}{8}$ c) 435° d) -675° .

5. Tìm độ dài của các cung sau đây trên một đường tròn đường kính 10 m, biết số đo lần lượt là:

- a) $\frac{7\pi}{5}$ b) 3,2 c) 43° .

6. Dùng máy tính bỏ túi, tính các giá trị lượng giác sau :

- a) $\sin \frac{\pi}{15}$ b) $\cos 3,6$ c) $\tan(-2,5)$ d) $\sin 42^\circ 13'$.

7. Tính giá trị lượng giác của cung α trong mỗi trường hợp sau đây :

- a) $\sin \alpha = \frac{5}{7}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ b) $\cos \alpha = -0,27$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
 c) $\tan \alpha = -\frac{5}{3}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ d) $\cot \alpha = 2,3$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

8. Dùng đường tròn lượng giác, tính α biết :

- a) $\sin \alpha = -1$ b) $\cos \alpha = 0$ c) $\tan \alpha = 1$ d) $\cos \alpha = -1$
 e) $\sin \alpha = 1$ f) $\cos \alpha = 1$ g) $\sin \alpha = 0$ h) $\cot \alpha = -1$.

9. Chứng minh các đẳng thức sau :

- a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$ b) $\frac{\tan x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cot x} = \cos x$
 c) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ d) $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 1 + 2 \tan^2 \alpha$.

10. Trong tam giác ABC, chứng minh các đẳng thức sau :

- a) $\cos(A + B) = -\cos C$ b) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.

D. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1. a) $A^\circ = \frac{\pi \cdot A}{180} \text{ rad} \Rightarrow 13^\circ = \frac{\pi \cdot 13}{180} = \frac{13\pi}{180} (\text{rad})$

b) $A^\circ = \frac{\pi \cdot A}{180} \text{ rad} \Rightarrow 36^\circ 12' = \frac{\pi \cdot (36 \cdot 60 + 12)}{180 \cdot 60} = \frac{181\pi}{900} (\text{rad})$

c) $A^\circ = \frac{\pi \cdot A}{180} \text{ rad} \Rightarrow -29^\circ = -\frac{\pi \cdot 29}{180} = -\frac{29\pi}{180} (\text{rad})$

d) Làm tương tự câu b), nhớ đổi đơn vị ra "phút", $-127^\circ 46' = -\frac{3833\pi}{5400} (\text{rad})$.

2. a) $\alpha \text{ rad} = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{18} \text{ rad} = \left(\frac{\pi \cdot 180}{18 \cdot \pi} \right)^\circ = 10^\circ$

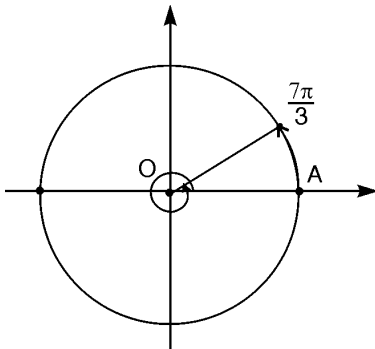
b) $\alpha \text{ rad} = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ \Rightarrow -\frac{3\pi}{19} \text{ rad} = -\left(\frac{3\pi \cdot 180}{19 \cdot \pi} \right)^\circ = -\left(\frac{540}{19} \right)^\circ \approx -28^\circ 25'$

c) $\alpha \text{ rad} = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ \Rightarrow -2,5 \text{ rad} = -\left(\frac{2,5 \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = -\left(\frac{450}{\pi} \right)^\circ \approx -143^\circ$

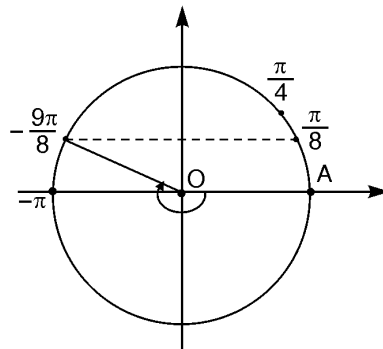
d) $\alpha \text{ rad} = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ \Rightarrow \frac{3}{7} \text{ rad} = \left(\frac{3 \cdot 180}{7 \pi} \right)^\circ = \left(\frac{540}{7 \pi} \right)^\circ \approx 24^\circ 33'.$

3. Sau 1 giờ, kim phút của chiếc đồng hồ quay được 1 vòng (thuận), tức là quay được 360° . Từ nửa đêm đến 9 giờ sáng là 9 giờ, vậy kim phút quay được một góc $9 \times 360^\circ = 3240^\circ$. Theo quy ước góc chiều quay ngược chiều kim đồng hồ là chiều quay dương nên kim phút quay được một góc -3240° .

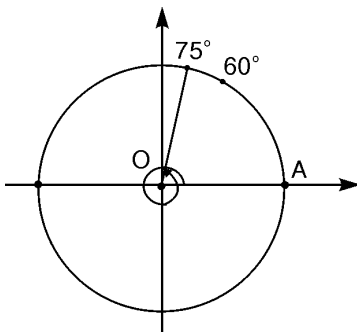
4. Xem hình vẽ :



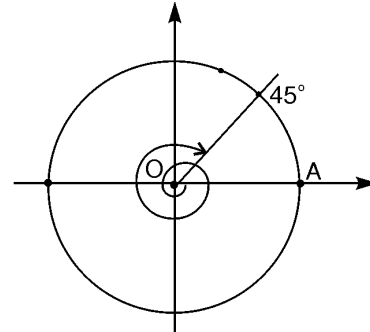
a) $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$



b) $-\frac{9\pi}{8} = -\pi + \frac{-\pi}{8}$



c) $435^\circ = 360^\circ + 75^\circ$



d) $-675^\circ = -720^\circ + 45^\circ$

5. a) $l = R\alpha = 10 \cdot \frac{7\pi}{5} = 14\pi \approx 43,98$ (m)

b) $l = R\alpha = 10 \cdot 3,2 = 32$ (m)

c) $43^\circ = \frac{\pi \cdot 43}{180} = \frac{43\pi}{180}$ (rad), $l = R\alpha = 10 \cdot \frac{43\pi}{180} = \frac{43\pi}{18} \approx 7,5$ (m).

6. a) 0,2079 b) -0,8967 c) 0,7470 d) 0,6719.

7. a) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ đều nhận giá trị âm. Từ công thức

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ ta suy ra } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{7}, \tan \alpha = -\frac{5}{2\sqrt{6}} \text{ và } \cot \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

b) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha < 0$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ đều nhận giá trị dương. Từ công thức

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ suy ra } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - (-0,27)^2 = 0,9271.$$

$$\text{Vậy } \sin \alpha \approx -0,963; \tan \alpha \approx 3,567, \cot \alpha \approx 0,28.$$

c) Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha < 0$. Từ công thức $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ suy ra

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (-\frac{5}{3})^2} = \frac{9}{34}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}, \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{34} = \frac{25}{34}, \sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{34}}, \cot \alpha = -\frac{3}{5}.$$

d) Từ công thức $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ suy ra

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 5,29} = \frac{1}{6,29} \approx 0,159, \text{ do vậy } \sin \alpha \approx 0,399.$$

8. Cần vẽ đường tròn lượng giác, với các trục sin, cosin, tang, cotang :

a) $\sin \alpha = -1, \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

b) $\cos \alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $\tan \alpha = 1, \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$

d) $\cos \alpha = -1, \alpha = \pi + 2k\pi$

e) $\sin \alpha = 1, \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

f) $\cos \alpha = 1, \alpha = 2k\pi$

g) $\sin \alpha = 0, \alpha = k\pi$

h) $\cot \alpha = -1, \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$

$$\begin{aligned} 9. a) \tan^2 x - \sin^2 x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x \\ &= \frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \frac{\tan x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cot x} &= \frac{\cot x \cdot \tan x}{\sin x \cdot \cot x} - \frac{\sin x}{\frac{\cos x}{\sin x}} \\ &= \frac{1}{\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} - \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \frac{1 + \sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos^2 x = (1 + \sin x)(1 - \sin x) \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha - \tan^2 \alpha} = 1 + 2\tan^2 \alpha. \end{aligned}$$

10. a) Vì A, B, C là ba góc của một tam giác nên $A+B+C = \pi$, suy ra $A+B = \pi - C$.
 Từ đó $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$. (đpcm)

$$b) \text{ Từ } A+B+C = \pi, \text{ suy ra } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}, \text{ suy ra } \sin \frac{A+B}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}.$$

0.2 BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi giải các bài toán về lượng giác ta cần sử dụng một số công thức lượng giác để biến đổi. Để dễ nhớ, ta chia các công thức lượng giác thành các nhóm sau đây:

- Công thức cơ bản
- Công thức cộng và công thức nhân
- Công thức biến đổi (tổng thành tích và tích thành tổng).

1) Công thức cơ bản

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Một số công thức khác như $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \dots$ được suy ra từ công thức cơ bản.

2) Công thức cộng và công thức nhân

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}.$$

Từ những công thức này, thay b bằng a, ta sẽ có **công thức góc nhân đôi** như sau :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \Rightarrow \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \quad (1)$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

Từ công thức (1) ta lại suy ra được **công thức hạ bậc**

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

3) Công thức biến đổi

a) *Biến đổi tổng thành tích (vế trái là tổng)*

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$