TẠ QUANG SƠN

GIÁO TRÌNH
GIẢI TÍCH LỒI VÀ TỐI ƯU

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TẠ QUANG SƠN

GIÁO TRÌNH
GIẢI TÍCH LỒI
VÀ TỐI ƯU

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên **MẠC VĂN THIỆN**
Tổng Giám đốc **GS.TS. VŨ VĂN HÙNG**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **TS. PHAN XUÂN THÀNH**

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN KHÁNH**
Giám đốc Công ty CP Dịch vụ xuất bản giáo dục Gia Định
TRẦN THỊ KIM NHUNG

Biên tập nội dung : LỤC VĂN HÀO
Trình bày bìa : THÁI HỮU DƯƠNG
Biên tập kĩ thuật : CÁT TƯỜNG
Minh hoạ : DIỆU TƯỜNG
Sửa bản in : LỤC VĂN HÀO
Chế bản : NHỊ TƯỜNG

Công ty CP Dịch vụ xuất bản giáo dục Gia Định -
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH LỒI VÀ TỐI ƯU

Lời mở đầu

Tài liệu này được viết dựa trên sự mở rộng các bài giảng của tác giả về môn học Giải tích lồi & Tối ưu, được giảng dạy cho các lớp Cao học Toán giải tích và các lớp Đại học Toán ứng dụng thuộc trường Đại học Sài Gòn từ năm 2014.

Như tên gọi của cuốn sách, nội dung của tài liệu này chia làm hai phần. Phần đầu dành để trình bày các kiến thức cơ sở của Giải tích lồi, phần thứ hai dành để nghiên cứu một số vấn đề liên quan đến Lí thuyết tối ưu trên lớp bài toán tối ưu lồi. Giải tích lồi là môn học nền tảng trong Lí thuyết tối ưu. Bàn về sự quan trọng của Giải tích lồi, Giáo sư R.T. Rockafellar, một chuyên gia hàng đầu của thế giới về Lí thuyết tối ưu, đã cho rằng sự phân chia giữa tính lồi và tính không lồi là có ý nghĩa nhất trong Lí thuyết tối ưu*.

Ngoài các nội dung cần thiết của các bài giảng, nhiều phần mở rộng đã được tác giả chọn lọc đưa vào trong tài liệu nhằm phục vụ việc học tập cho các học viên cao học. Tài liệu được tổ chức thành 3 chương, trong đó:

Chương 1: Giới thiệu các khái niệm cơ bản về tập affine, tập lồi, khái niệm điểm cực biên cùng một số tính chất cơ bản của các khái niệm đó. Định lí Carathéodory về tập lồi cũng được giới thiệu trong chương này. Tiếp đó, các kết quả về việc tách tập lồi và siêu phẳng tựa tập lồi được giới thiệu. Phần tiếp theo dành để nghiên cứu về các khái niệm nón, trong đó tập trung quan tâm, khảo sát nón pháp tuyến và nón tiếp xúc của tập lồi tại một điểm. Phần cuối

*R.T. Rockafellar, Lagrange multipliers and optimality, SIAM Review, 35, 183-238, 1993.

của chương được dành để giới thiệu về nhóm các định lí thay phiên cho hệ tuyến tính, trọng tâm là bổ đề Farkas.

Chương 2: Trình bày các kiến thức cơ bản liên quan đến hàm lồi trên tập lồi, đặc trưng của hàm lồi, các tính chất của hàm lồi liên tục và hàm lồi khả vi, hàm liên hợp của hàm lồi. Đối với hàm lồi không khả vi, dưới vi phân của hàm lồi và các phép tính dưới vi phân được quan tâm khảo sát. Dưới vi phân của một số hàm lồi có nhiều ứng dụng như dưới vi phân của hàm chỉ, hàm Max được quan tâm. Định lí Moreau-Rockafellar về dưới vi phân của tổng các hàm lồi được giới thiệu trong chương này. Ngoài ra, khái niệm dưới vi phân xấp xỉ của hàm lồi cũng được giới thiệu. Phần cuối của chương 2 được dành để giới thiệu một số kết quả về định lí thay phiên cho hệ lồi nhằm chuẩn bị cho việc nghiên cứu các điều kiện tối ưu trong chương 3.

Chương 3: Trình bày một số vấn đề cơ bản về lí thuyết các điều kiện tối ưu cho bài toán lồi không ràng buộc và có ràng buộc. Đối với bài toán có ràng buộc, tài liệu nghiên cứu các điều kiện tối ưu dạng Fritz-John và dạng Karush-Kuhn-Tucker. Các điều kiện tối ưu cho lớp các bài toán lồi khả vi và không khả vi tương ứng được giới thiệu. Chúng tôi cũng sơ lược giới thiệu về lớp bài toán tối ưu lồi nửa vô hạn. Lí thuyết đối ngẫu Lagrange và vấn đề đặc trưng tập nghiệm được đưa vào như là các vấn đề mở rộng.

Để biên soạn tài liệu này tác giả đã quan tâm đến một số tài liệu chuyên khảo có liên quan trong và ngoài nước. Đặc biệt các tài liệu số [1], [5], [6], [7], [8], [10], [13], [14] được tham khảo để viết chương 1 và 2. Phần lí thuyết các điều kiện tối ưu được tham khảo từ các tài liệu [5], [6], [7]. Phần chính của Lí thuyết đối ngẫu được tham khảo từ tài liệu số [1], [10], [41]. Song song với các tài liệu chính, nhiều thông tin trong các bài báo khoa học và các tài liệu khác cũng được tác giả chọn lọc nội dung để đưa vào hoặc giới thiệu trong tài liệu. Hầu hết các chứng minh kết quả cơ bản trong tài liệu này đều được chỉ rõ nguồn tham khảo để bạn đọc có thể tra cứu thêm dễ dàng. Phần lớn bài tập trong tài liệu này được tác giả tuyển chọn từ các tài liệu nói trên. Ngoài chức năng như một tài liệu phục vụ cho việc dạy và học môn học Giải tích lồi & Tối

ưu, tài liệu này còn có những vấn đề được mở rộng so với đề cương của môn học, hoặc giới thiệu thêm những kết quả nghiên cứu mới có liên quan, thông qua các tài liệu tham khảo. Điều này nhằm giúp cho người học có hướng để tiếp cận sâu hơn về vấn đề đang quan tâm, nhất là các học viên cao học. Nội dung của tài liệu được trình bày trên không gian $\mathbb{R}^n$. Để tìm hiểu sâu hơn về Giải tích lồi trên các không gian trừu tượng, bạn đọc có thể tham khảo thêm ở các tài liệu khác chẳng hạn như các tài liệu [18], [54], [55].

Tài liệu được biên soạn có chú ý đến việc tự học, vì vậy nhiều hình vẽ, nhận xét, hoặc các ví dụ minh hoạ đã được tác giả quan tâm đưa vào trong tài liệu. Cuối mỗi chương đều có bài tập nhằm củng cố hoặc mở rộng phần lí thuyết. Các bài tập đều có hướng dẫn giải hoặc giải tóm tắt. Để sử dụng tài liệu này, người học cần có hiểu biết cơ bản về Giải tích thực, Giải tích hàm và Đại số tuyến tính. Tài liệu này được xử lí sắp chữ trên phần mềm Texmaker 4.5, phần hình vẽ được hỗ trợ bởi phần mềm Ipe 7.2.6 và phần mềm TpX 1.5.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Khoa Toán & Ứng dụng và Phòng Quản lí khoa học của trường Đại học Sài Gòn, Nhà xuất bản Giáo dục tại Thành phố Hồ Chí Minh, Công ty Cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Gia Định, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để cuốn sách này được hoàn thành và xuất bản.

Tác giả cũng xin được bày tỏ sự cảm ơn chân thành đến quý thầy cô, các đồng nghiệp, các học viên cao học và gia đình đã truyền cảm hứng cho tác giả trong quá trình biên soạn tài liệu này.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng chắc chắn cuốn sách này không thể tránh khỏi những sơ suất và hạn chế nhất định, tác giả xin chân thành cảm ơn những nhận xét và góp ý để cuốn sách này được hoàn thiện hơn trong lần tái bản.

Đại học Sài Gòn, tháng 02, năm 2017

Tạ Quang Sơn

taquangson@sgu.edu.vn

Mục lục

Lời mở đầu i
Mục lục v
Danh sách hình vẽ ix
Kí hiệu và chữ viết tắt xi

1 TẬP LỒI **1**
1.1 Một số khái niệm topo cơ bản trong $\mathbb{R}^n$ 2
1.2 Tập affine 3
1.3 Tập lồi và các tính chất cơ bản 7
1.3.1 Tập lồi 7
1.3.2 Các tính chất cơ bản của tập lồi 8
1.3.3 Một số tính chất khác của tập lồi 13
1.4 Phần trong tương đối 15
1.5 Siêu phẳng tựa và định lí tách tập lồi 18
1.5.1 Siêu phẳng và nửa không gian 18
1.5.2 Tập lồi và siêu phẳng tựa 20
1.5.3 Đặc trưng tập lồi qua siêu phẳng tựa 24
1.5.4 Định lí tách tập lồi 25
1.6 Điểm cực biên và siêu phẳng tựa tập lồi 26
1.6.1 Điểm cực biên 26
1.6.2 Mối liên quan giữa điểm cực biên và siêu phẳng tựa . 28
1.7 Khái niệm nón và các nón đặc biệt 29
1.7.1 Các định nghĩa và tính chất 29
1.7.2 Nón đối cực 35

1.7.3 Nón pháp tuyến (nón chuẩn) . . . 39
1.7.4 Nón tiếp xúc . . . 41
1.7.5 Nón lùi xa . . . 48
1.8 Bất đẳng thức suy rộng theo nón . . . 51
1.8.1 Quan hệ thứ tự theo nón . . . 51
1.8.2 Điểm cực tiểu và điểm tối tiểu . . . 52
1.8.3 Điểm cực đại và điểm tối đại . . . 53
1.9 Các định lí thay phiên cho hệ tuyến tính . . . 54
Bài tập Chương 1 . . . 60

2 HÀM LỒI **69**
2.1 Hàm lồi và các tính chất . . . 70
2.1.1 Các định nghĩa . . . 70
2.1.2 Đặc trưng của hàm lồi . . . 72
2.1.3 Bất đẳng thức Jensen . . . 73
2.2 Tập mức dưới và epigraph . . . 74
2.3 Các phép toán bảo toàn tính lồi . . . 77
2.3.1 Tổng có trọng số không âm của hữu hạn hàm lồi . . . 77
2.3.2 Hợp của hàm lồi với hàm affine . . . 77
2.3.3 Supremum của các hàm lồi . . . 78
2.3.4 Một số hàm lồi cần biết . . . 80
2.4 Một số hàm lồi đặc biệt . . . 81
2.5 Liên hợp của hàm lồi . . . 85
2.5.1 Định nghĩa và các ví dụ . . . 85
2.5.2 Tính chất . . . 86
2.6 Hàm lồi liên tục . . . 87
2.6.1 Tính bị chặn địa phương . . . 87
2.6.2 Hàm lồi và tính Lipschitz . . . 88
2.6.3 Hàm lồi và tính nửa liên tục . . . 91
2.6.4 Tính cực tiểu và cực đại của hàm lồi . . . 95
2.7 Đạo hàm theo hướng của hàm lồi . . . 97
2.8 Hàm lồi khả vi . . . 101

2.8.1 Điều kiện cấp 1 đặc trưng hàm lồi 102
2.8.2 Điều kiện cấp 2 đặc trưng hàm lồi 105
2.8.3 Đạo hàm theo hướng của hàm max 108
2.9 Dưới vi phân của hàm lồi 111
2.9.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản của dưới vi phân . . 112
2.9.2 Dưới vi phân của hàm lồi và siêu phẳng tựa 119
2.9.3 Dưới vi phân của hàm chỉ và nón chuẩn 121
2.9.4 Dưới vi phân của hàm max 122
2.10 Phép tính dưới vi phân 124
2.11 Dưới vi phân xấp xỉ 129
2.11.1 Định nghĩa và tính chất 129
2.11.2 Phép toán cho dưới vi phân xấp xỉ 130
2.11.3 Dưới vi phân xấp xỉ và epigraph của hàm liên hợp . . . 132
2.12 Định lí thay phiên cho hệ lồi 133
Bài tập Chương 2 136

3 BÀI TOÁN TỐI ƯU LỒI **143**
3.1 Bài toán tối ưu 144
3.1.1 Một số khái niệm ban đầu về bài toán tối ưu 144
3.1.2 Điều kiện có cực trị 145
3.1.3 Điểm yên ngựa 147
3.2 Bài toán tối ưu lồi không ràng buộc 148
3.2.1 Điều kiện tối ưu của hàm lồi khả vi 148
3.2.2 Điều kiện tối ưu của hàm lồi không khả vi 150
3.3 Bài toán tối ưu lồi có ràng buộc 155
3.3.1 Trường hợp bài toán lồi không khả vi 156
3.3.2 Trường hợp bài toán lồi khả vi 160
3.3.3 Tập chấp nhận được và điều kiện Karush-Kuhn-Tucker 162
3.3.4 Bài toán lồi có ràng buộc tổng quát 165
3.4 Sơ lược về bài toán lồi nửa vô hạn 167
3.4.1 Điều kiện tối ưu dựa trên điều kiện Slater 168
3.4.2 Điều kiện tối ưu dựa trên bổ đề Farkas suy rộng 171

3.4.3 Bài toán lồi với ràng buộc nón 173
3.5 Hàm Lagrange và điểm yên ngựa 174
3.5.1 Điểm yên ngựa của hàm Lagrange 174
3.5.2 Tính hằng của hàm Lagrange trên tập nghiệm 177
3.6 Đối ngẫu của bài toán tối ưu lồi 178
3.6.1 Lí thuyết tổng quát về đối ngẫu 178
3.6.2 Định lí minimax và định lí điểm yên ngựa 180
3.6.3 Đối ngẫu Lagrange 184
3.6.4 Tính chất điểm yên ngựa 187
3.6.5 Điều kiện để tồn tại điểm yên ngựa 188
3.7 Đặc trưng tập nghiệm của bài toán lồi 189
3.7.1 Trường hợp bài toán không ràng buộc 189
3.7.2 Trường hợp bài toán có ràng buộc 194
3.7.3 Đặc trưng tập nghiệm của bài toán lồi nửa vô hạn . . . 199
Bài tập Chương 3 202

Hướng dẫn giải bài tập **206**

Bảng chỉ mục **221**

Tài liệu tham khảo **223**

Danh sách hình vẽ

1.1 *Điểm z là điểm trong, điểm x là điểm biên của tập S.* 2
1.2 *Đoạn thẳng và đường thẳng tạo bởi hai điểm* 3
1.3 *Không gian Affine* 6
1.4 *Tập lồi* 7
1.5 *Tập không lồi* 7
1.6 *Bao lồi của hữu hạn điểm* 8
1.7 *Bao lồi của tập không không lồi* 8
1.8 *Bao lồi của hai tập hợp* 9
1.9 *Phần trong tương đối* 17
1.10 *Siêu phẳng trong* $\mathbb{R}^2$ 19
1.11 *Siêu phẳng chia không gian thành hai nửa không gian* 19
1.12 *Điểm* $z \in C$ *gần y nhất* 21
1.13 *Siêu phẳng tựa của tập lồi* 24
1.14 *Siêu phẳng tựa tại điểm biên của tập không lồi* 25
1.15 *Siêu phẳng tách hai tập lồi C và D* 26
1.16 *Điểm z là điểm cực biên, điểm x là điểm biên* 27
1.17 *Nón có đỉnh tại O và nón có đỉnh tại* x_0 30
1.18 *Nón lồi và nón không lồi* 30
1.19 *Nón nhọn và nón không nhọn* 31
1.20 *K là nón không thực sự* 31
1.21 *Nón sinh bởi 2 điểm và nón lồi sinh bởi bao lồi của 2 diểm* . . 32
1.22 *Nón lồi sinh bởi tập A và nón lồi sinh bởi hữu hạn điểm* 34
1.23 K^* *là nón đối cực của nón lồi sinh bởi 3 điểm* 36
1.24 K^* *là nón đối cực của nón K* 37

1.25 *Nón pháp tuyến tại điểm z của tập lồi C* 39
1.26 *Hướng chấp nhận được và không chấp nhận đươc* 41
1.27 *Véc-tơ tiếp xúc* 43
1.28 *Một vài dạng hình học của nón tiếp xúc* 45
1.29 *Nón tiếp xúc* 46
1.30 *Nón lùi xa* 48
1.31 *Điểm cực tiểu và điểm tối tiểu* 52
1.32 *Điểm cực đại và điểm tối đại* 54
1.33 *Định lí Farkas: Hệ 1 vô nghiệm, hệ 2 có nghiệm* 57
1.34 *Định lí Farkas: Hệ 1 có nghiệm, hệ 2 vô nghiệm* 57

2.1 *Hàm lồi* 70
2.2 *Hàm lồi không chặt* 72
2.3 *Tập mức dưới của hàm không lồi* 75
2.4 *Đồ thị và trên đồ thị của hàm f* 75
2.5 *Hàm affine $y = ax + b$ và hàm tuyến tính $y = ax$.* 77
2.6 *Hàm tuyến tính từng khúc.* 81
2.7 *Xây dựng hàm liên hợp* 85
2.8 *Tính lồi của hàm lồi khả vi.* 103
2.9 *Véc-tơ xác định siêu phẳng tựa của epi f.* 105
2.10 *Dưới vi phân của hàm chỉ trên tập lồi C tại x_0* 121

3.1 *Điểm yên ngựa* 148
3.2 *Nghiệm tối ưu của bài toán lồi có các ràng buộc lồi* 161
3.3 *Miền chấp nhận được của bài toán **10.** ii) chương 3* 219

Kí hiệu và chữ viết tắt

	$\overbrace{\qquad\qquad}^{n-\text{lần}}$
$\mathbb{R}^n$	$\overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}$
$x\in\mathbb{R}^n$	Biểu diễn thành bộ có n thành phần $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
$x\in\mathbb{R}^n$	Biểu diễn bởi ma trận cột $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
$[x,y]$	Đoạn thẳng nối 2 điểm x và y
$L(u,x_0)$	Đường thẳng $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=x_0+\lambda u,\forall\lambda\in\mathbb{R}\}$
$L_+(u,x_0)$	Tia $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=x_0+\lambda u,\forall\lambda\geq 0\}$
$L_-(u,x_0)$	Tia $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=x_0+\lambda u,\forall\lambda\leq 0\}$
x^T	Ma trận dòng của véc-tơ x, $[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$.
$\langle u,v\rangle$	Tích vô hướng của hai véc-tơ u và v trong $\mathbb{R}^n$, $\langle u,v\rangle=u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n=u^Tv$.
A	Ma trận m dòng n cột
A^T	Ma trận chuyển vị của ma trận A
A^{-1}	Ma trận đảo của ma trận A (nếu A là ma trận vuông không suy biến)
$\|x\|$	$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$
$\|x\|^2$	$\langle x,x\rangle$
$\|x-y\|$	Khoảng cách giữa hai điểm $x,y\in\mathbb{R}^n$ $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$.
$\|x-y\|^2$	$\langle x-y,x-y\rangle$
$\|x\|_\infty$	$\max\limits_{i=1,\ldots,n}\|x_i\|$
$\|x\|_1$	$\sum_{i=1}^n\|x_i\|$
$U_\varepsilon(z)$	Lân cận cầu tâm z bán kính ε $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-z\|<\varepsilon\}$

S^c	Phần bù của tập S trong $\mathbb{R}^n$
S_1+S_2	Tập hợp $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=x_1+x_2, x_1\in S_1, x_2\in S_2\}$
αS	Tập hợp $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=\alpha s, s\in S\}$
$\mathrm{aff}(A)$	Bao affine của tập A
$\mathrm{co}(A)$	Bao lồi của tập hợp A
$\mathrm{cl}(S)$	Bao đóng của tập S
$\mathrm{int}(S)$	Phần trong của tập S
$\mathrm{ri}(S)$	Phần trong tương đối của tập S
$\mathrm{bd}(S)$	Biên của tập S
$\mathrm{cone}(A)$	Nón sinh bởi tập hợp A
$\mathrm{conv}(A)$	Nón lồi sinh bởi tập hợp A
C_e	Tập hợp các điểm cực biên của tập lồi C
K^*	Nón đối cực của K (thường hiểu nón đối cực âm)
K^+	Nón đối cực dương của K
$N(C,z)$	Nón pháp tuyến (nón chuẩn) của C tại điểm z
$F(S,z)$	Nón các hướng chấp nhận được của tập S tại điểm z
$T(S,z)$	Nón tiếp xúc của S tại z
R_C	Nón lùi xa của tập lồi C
H_a^α	Siêu phẳng $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle a,x\rangle=\alpha\}, \alpha\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}^n$
$\mathrm{dom} f$	Miền hữu hiệu (hữu dụng) của f
$\mathrm{epi} f$	Trên đồ thị của f
$L_\alpha(f)$	Tập α-mức dưới của f
f^*	Hàm liên hợp của hàm f
$\nabla f(x)$	Véc-tơ gradient của hàm f: $(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$
$f'(z;v)$	Đạo hàm theo hướng v (1 phía) của f tại z
$\partial f(x)$	Dưới vi phân của hàm lồi f
$\partial_\varepsilon f(x)$	ε-dưới vi phân của hàm lồi f
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\inf\limits_{m\geq n} x_m\right)$
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{m\geq n} x_m\right)$
$t\downarrow 0$	$t\to 0$ với $t>0$
V(P)	Giá trị tối ưu của bài toán (P)
$\square$	Kết thúc chứng minh
$\triangleright$	Bắt đầu giải thích

Chương 1

TẬP LỒI

"Không có vấn đề phức tạp nào đứng vững được trước sự tấn công bền bỉ của tư duy."

Voltaire[†](1694-1778)

1.1 Một số khái niệm topo cơ bản trong $\mathbb{R}^n$ 2
1.2 Tập affine 3
1.3 Tập lồi và các tính chất cơ bản 7
1.4 Phần trong tương đối 15
1.5 Siêu phẳng tựa và định lí tách tập lồi 18
1.6 Điểm cực biên và siêu phẳng tựa tập lồi 26
1.7 Khái niệm nón và các nón đặc biệt 29
1.8 Bất đẳng thức suy rộng theo nón 51
1.9 Các định lí thay phiên cho hệ tuyến tính 54
Bài tập Chương 1 60

[†]François-Marie Arouet được biết đến với bút hiệu Voltaire. Ông là đại văn hào người Pháp. Ông cũng đồng thời là nhà thần luận và nhà triết học (xem https://vi.wikipedia.org/wiki/Voltaire)
"No problem can stand the assault of sustained thinking." http://www.quotes.net/quote/18612

1.1 Một số khái niệm topo cơ bản trong $\mathbb{R}^n$

Cho $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ta gọi một lân cận mở tâm x_0 bán kính r là tập hợp được kí hiệu và xác định như sau:

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}.$$

Lân cận cầu đóng tâm x_0 bán kính r được kí hiệu và định nghĩa bởi

$$\bar{B}(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Điểm z gọi là điểm trong của tập S nếu tồn tại lân cận mở tâm z bán kính r chứa hoàn toàn trong S. Tập hợp tất cả các điểm trong của tập S gọi là phần trong của tập đó, kí hiệu $\text{int}(S)$.

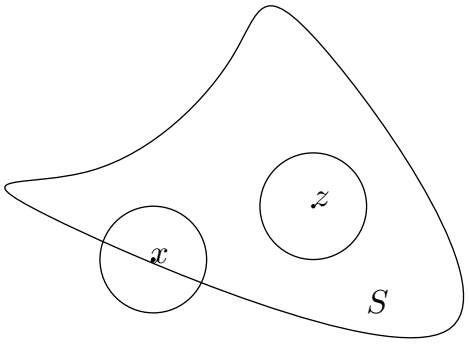
Nếu $S = \text{int}(S)$ thì S gọi là tập mở.

Tập hợp $\text{int}(S)$ là tập mở lớn nhất chứa trong S.

Tập đóng* nhỏ nhất chứa S gọi là bao đóng của S và kí hiệu là $\text{cl}(S)$.

Điểm $x \in \text{cl}(S)$ nhưng $x \notin \text{int}(S)$ được gọi là điểm biên của S.

Tập tất cả các điểm biên của S gọi là biên của S, kí hiệu $\text{bd}(S)$.



Hình 1.1: *Điểm z là điểm trong, điểm x là điểm biên của tập S.*

*Trong không gian topo, một tập hợp được gọi là đóng nếu có phần bù là tập mở. Chú ý rằng một tập hợp là tập đóng nếu nó chứa mọi điểm tụ (điểm dính).

1.2 Tập affine

Cho trước hai điểm $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Đường thẳng đi qua hai điểm đã cho là tập hợp các điểm xác định bởi phương trình

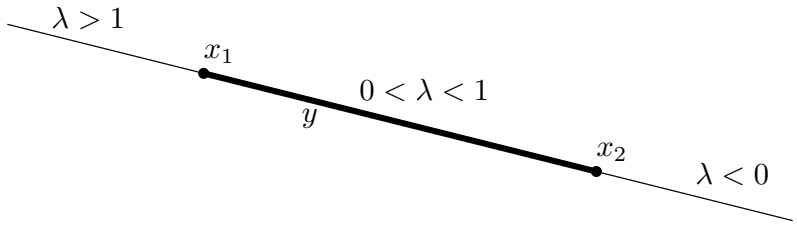
$$y = x_2 + \lambda(x_1 - x_2), \lambda \in \mathbb{R},$$

hay

$$y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Khi $\lambda = 0$, điểm y trùng với x_2, khi $\lambda = 1$ điểm y trùng với x_1. Khi $\lambda \in (0,1)$, điểm y ở giữa đoạn thẳng $[x_1, x_2]$. Khi $\lambda < 0$ hoặc $\lambda > 1$, điểm y nằm ngoài đoạn $[x_1, x_2]$ (Hình 1.2).

Điểm y nói trên được gọi là tổ hợp affine của hai điểm x_1 và x_2.



Hình 1.2: *Đoạn thẳng và đường thẳng tạo bởi hai điểm*

Chú ý 1.1. Ta dùng kí hiệu $[x,y]$ để chỉ đoạn thẳng đóng nối hai điểm x và y, và dùng kí hiệu (x,y) để chỉ đoạn thẳng mở nối hai điểm x và y:

$$\begin{aligned} [x,y] &:= \quad \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \lambda x + (1-\lambda)y, \forall \lambda \in [0,1]\}, \\ (x,y) &:= \quad \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \lambda x + (1-\lambda)y, \forall \lambda \in (0,1)\}. \end{aligned}$$

Chú ý 1.2. Cho véc-tơ $u \neq 0$ và điểm x_0 cố định trong không gian $\mathbb{R}^n$. Đường thẳng có phương u đi qua điểm x_0, kí hiệu $L(u,x_0)$, là tập hợp được xác định bởi

$$L(u,x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + \lambda u, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Từ $L(u,x_0)$, ta có hai tia được kí hiệu và định nghĩa bởi:

$$L_+(u,x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + \lambda u, \forall \lambda \geq 0\},$$

$$L_-(u,x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + \lambda u, \forall \lambda \leq 0\}.$$

Định nghĩa 1.1. *Cho tập hợp $A \subset \mathbb{R}^n$ khác rỗng. Tập A được gọi là tập affine nếu bất kì hai điểm nào thuộc A thì đường thẳng nối hai điểm đó cũng thuộc A.*

Ví dụ 1.1.

(i) Các đường thẳng hình học xét trong $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ là các tập affine;

(ii) Các mặt phẳng xét trong $\mathbb{R}^3$ là các tập affine;

(iii) Tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $Bx = b$, với B là ma trận cấp $m \times n$, là một tập affine.

Định nghĩa 1.2. *Cho trước k điểm $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Ta gọi y là một tổ hợp affine của k điểm nói trên nếu tồn tại $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ sao cho $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ và y có dạng biểu diễn*

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k.$$

Định lí 1.1. *Nếu A là tập affine trong $\mathbb{R}^n$ và $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là k điểm bất kì thuộc A thì tổ hợp affine của k điểm nói trên cũng thuộc A.*

Chứng minh. Với $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ sao cho $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, xét tổ hợp

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k.$$

Khi $k = 2$, định lí đúng theo định nghĩa tập affine.

Giả sử định lí đúng đến $k-1$, khi đó tổ hợp affine của $k-1$ điểm thuộc A là thuộc A. Ta chứng minh định lí đúng đến k. Không mất tính tổng quát, giả sử $\lambda_k \neq 1$. Khi đó y viết lại

$$y = (1 - \lambda_k)\Big[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k} x_{k-1}\Big] + \lambda_k x_k.$$

Phần trong ngoặc vuông là tổ hợp affine của $k-1$ điểm vì

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k} + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k} = 1.$$

Theo giả thiết qui nạp, tổ hợp này thuộc A. Đặt

$$x^* = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_k} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k} x_{k-1}.$$

Khi đó, $x^* \in A$ và $y = (1 - \lambda_k)x^* + \lambda_k x_k \in A$. □

Định lí 1.2. *Cho $A \subset \mathbb{R}^n$ là tập affine và $x_0 \in A$. Khi đó tập hợp*

$$V := A - x_0 := \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = x - x_0, x \in A\}$$

là một không gian véc-tơ con của $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Với bất kì hai điểm u, v thuộc V và với mọi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, cần chứng minh $\lambda u + \mu v \in V$. Thật vậy, với u, v nói trên và $x_0 \in A$ đã cho, ta có

$$\lambda u + \mu v + x_0 = [\lambda(u + x_0) + (1 - \lambda)x_0] + [\mu(v + x_0) + (1 - \mu)x_0] - x_0. \tag{1.1}$$

Xem $x = u + x_0$ và $y = v + x_0$ thì theo định nghĩa của tập V, ta có $x, y \in A$. Khi đó, do A là tập affine, ta nhận được

$$\bar{u} := \lambda(u + x_0) + (1 - \lambda)x_0 \in A$$

và

$$\bar{v} := \mu(v + x_0) + (1 - \mu)x_0 \in A.$$

Chú ý rằng $\frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}) \in A$ và $x_0 \in A$ nên từ (1.1), ta có

$$\lambda u + \mu v + x_0 = \bar{u} + \bar{v} - x_0 = 2[\frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})] - x_0 \in A.$$

Theo định nghĩa của tập V, ta suy ra $\lambda u + \mu v \in V$.

□

Nhận xét 1.1. Mọi tập affine $A \subset \mathbb{R}^n$ đều có thể được biểu diễn dưới dạng

$$A = V + x_0 = \{x + x_0 \mid x \in V\},$$

với V là không gian véc-tơ con của $\mathbb{R}^n$, x_0 là điểm thuộc A. Về mặt hình học, không gian affine là tịnh tiến của một không gian véc-tơ (Hình 1.3).

Định nghĩa 1.3. *Cho $C \subset \mathbb{R}^n$. Tập hợp gồm tất cả các tổ hợp affine của các điểm thuộc C gọi là bao affine của C (affine hull), kí hiệu* $\text{aff}(C)$.

Định lí 1.3. *Bao affine của C là tập affine nhỏ nhất chứa C.*

Chứng minh.