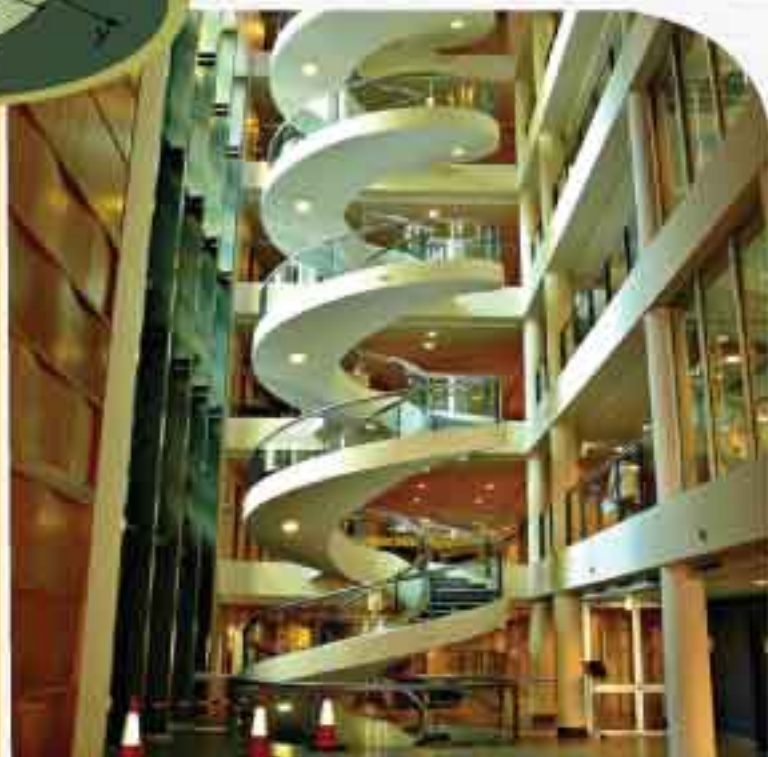
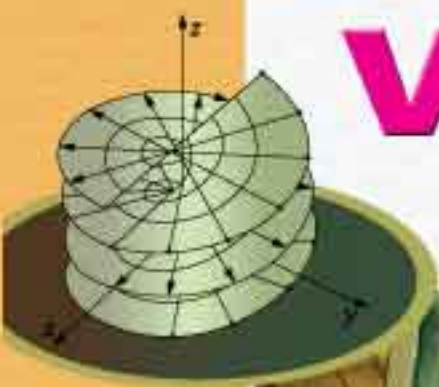


TRẦN LÊ NAM (Chủ biên)  
PHAN THỊ HIỆP - NGUYỄN THỊ NHANH

# GIÁO TRÌNH HÌNH HỌC VI PHÂN



NHA XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

# LỜI MỞ ĐẦU

Trong chương trình Đại học Sư phạm Toán học, hình học vi phân là môn học được giảng dạy sau môn hình học Ôclít. Đối tượng nghiên cứu chính của môn học là các đường cong trên mặt phẳng và trong không gian  $n$ -chiều, các mặt cong trong không gian 3-chiều. Phương pháp nghiên cứu trong bộ môn hình học vi phân tương đối đa dạng. Trong tài liệu này, chúng tôi sử dụng các phép tính vi phân và tích phân trong không gian  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) để xây dựng các phép tính vi phân và tích phân tương ứng trên các đường và mặt. Ngoài ra, giáo trình còn sử dụng thêm các kết quả của đại số tuyến tính, tô-pô, phương trình vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng để tìm ra các tính chất của các đối tượng hình học (chúng tôi có giới thiệu sơ lược các nội dung kiến thức quan trọng cần chuẩn bị trong Chương 0).

Giáo trình được biên soạn dựa trên 3 tài liệu chính [2], [3] và [10]. Nội dung chính của giáo trình được bố cục trong 2 chương. Chương 1 trình bày về các kiến thức cơ bản của lý thuyết đường như: độ dài, độ cong, độ xoắn, công thức Frenet, tiếp tuyến, pháp tuyến, trục pháp tuyến, mặt phẳng tiếp, mặt phẳng pháp và mặt phẳng trực đạt. Chương 2 trình bày các kiến thức cơ bản của lý thuyết mặt như: mặt chính quy, mặt tham số, các loại độ cong trên mặt, đường tiệm cận, định lý cơ bản về độ cong Gauss. Giáo trình cũng làm rõ sự thể hiện và ứng dụng của hình học vi phân trong thực tiễn, cũng như hình học phổ thông. Chúng tôi cũng trình bày cách sử dụng phần mềm Maple hỗ trợ cho việc vẽ hình và tính toán trong môn học. Bạn đọc quan tâm vấn đề sử dụng phần mềm Maple lập trình tính toán trong hình học vi phân có thể tham khảo thêm trong 2 bài báo [11-12]

Trong quá trình biên soạn chắc chắn không tránh khỏi những sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự đóng góp của bạn đọc để giáo trình ngày càng tốt hơn.

*TP. Cao Lãnh, Ngày 18 tháng 6 năm 2018*  
Các tác giả

# DANH MỤC KÍ HIỆU

| Kí hiệu                                                                    | Ý nghĩa                                               |
|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $A(\Sigma)$                                                                | Diện tích của mặt $\Sigma$                            |
| $\nabla f$                                                                 | Gradient của hàm $f$                                  |
| $C^k$                                                                      | Các hàm khả vi cấp $k \in \mathbb{N}^*$               |
| $C^\infty$                                                                 | Các hàm trơn                                          |
| $H$                                                                        | Hàm độ cong trung bình của mặt                        |
| $K$                                                                        | Hàm độ cong Gauss của mặt                             |
| $\mathbb{R}$                                                               | Trường số thực                                        |
| $\mathbf{N}$                                                               | Pháp véc-tơ của mặt                                   |
| $\mathbb{I}^n$                                                             | Hình lập phương đơn vị $[0, 1]^n$                     |
| $\mathbb{S}^{n-1}$                                                         | Siêu cầu đơn vị trong không gian $\mathbb{R}^n$       |
| $\{T, N\}$                                                                 | Mục tiêu Frenet của đường cong phẳng                  |
| $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$                                   | Mục tiêu Frenet của đường cong trong $\mathbb{R}^3$   |
| $\kappa$                                                                   | Hàm độ cong của đường cong                            |
| $\tau$                                                                     | Hàm độ xoắn của đường cong                            |
| $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \vec{x} \cdot \vec{y}, \vec{x} \vec{y}$ | Tích vô hướng của 2 véc-tơ $\vec{x}, \vec{y}$         |
| $ \vec{x} $                                                                | Chuẩn của véc-tơ $\vec{x}$ .                          |
| $[\vec{x}, \vec{y}], \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y}$       | Tích có hướng của 2 véc-tơ $\vec{x}, \vec{y}$         |
| $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$                                              | Tích hỗn hợp của 3 véc-tơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ |
| $f_{x_i}$                                                                  | Đạo hàm riêng của hàm $f$ theo biến $x_i$             |

# MỤC LỤC

|                                                                          |            |
|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Lời mở đầu</b>                                                        | <b>3</b>   |
| <b>Danh mục kí hiệu</b>                                                  | <b>4</b>   |
| <b>Mục lục</b>                                                           | <b>5</b>   |
| <b>CHƯƠNG 0</b>                                                          |            |
| <b>KIẾN THỨC CHUẨN BỊ</b>                                                | <b>6</b>   |
| §1 Tích vô hướng chính tắc trên không gian Ôclít . . . . .               | 6          |
| §2 Tích có hướng của 2 véc-tơ trong $\mathbb{R}^3$ . . . . .             | 7          |
| §3 Phép biến đổi đẳng cự trong không gian Ôclít . . . . .                | 9          |
| §4 Đạo hàm của hàm véc-tơ . . . . .                                      | 12         |
| §5 Hạng của ánh xạ khả vi . . . . .                                      | 14         |
| <b>CHƯƠNG 1</b>                                                          |            |
| <b>LÍ THUYẾT ĐƯỜNG</b>                                                   | <b>17</b>  |
| §1 Đường tham số trong không gian . . . . .                              | 18         |
| §2 Đường cong trong mặt phẳng . . . . .                                  | 30         |
| §3 Đường cong tham số tự nhiên trong không gian $\mathbb{R}^3$ . . . . . | 39         |
| §4 Đường cong song chính quy . . . . .                                   | 49         |
| <b>CHƯƠNG 2</b>                                                          |            |
| <b>LÍ THUYẾT MẶT</b>                                                     | <b>56</b>  |
| §1 Mặt chính quy trong không gian $\mathbb{R}^3$ . . . . .               | 57         |
| §2 Mặt tham số chính quy - Dạng cơ bản thứ nhất . . . . .                | 73         |
| §3 Độ cong Gauss và độ cong trung bình . . . . .                         | 97         |
| §4 Định lí cơ bản về độ cong Gauss . . . . .                             | 123        |
| <b>Hướng dẫn sửa bài tập</b>                                             | <b>128</b> |
| <b>Tài liệu tham khảo</b>                                                | <b>144</b> |
| <b>Bảng chỉ mục</b>                                                      | <b>145</b> |

## Chương 0

# KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

---

|    |                                                           |    |
|----|-----------------------------------------------------------|----|
| §1 | Tích vô hướng chính tắc trên không gian Ôclít . . .       | 6  |
| §2 | Tích có hướng của 2 véc-tơ trong $\mathbb{R}^3$ . . . . . | 7  |
| §3 | Phép biến đổi đẳng cự trong không gian Ôclít . . . .      | 9  |
| §4 | Đạo hàm của hàm véc-tơ . . . . .                          | 12 |
| §5 | Hạng của ánh xạ khả vi . . . . .                          | 14 |

---

*Chương này nhắc lại một số khái niệm và định lý trong 4 môn học Đại số tuyến tính, Hình học Ôclít, Giải tích I và Giải tích III theo Chương trình Đại học Sư phạm Toán học của Trường Đại học Đồng Tháp. Sinh viên cần tự ôn tập lại các kiến thức này trước khi tìm hiểu nội dung chính của giáo trình.*

## §1 TÍCH VÔ HƯỚNG CHÍNH TẮC TRÊN KHÔNG GIAN ÔCLÍT

Nội dung của mục này được viết dựa trên 2 tài liệu xem [7], [8].

### 1.1 Tích vô hướng trên không gian Ôclít

**Định nghĩa 1.1.1.** Chúng ta xem  $\mathbb{R}^n$  là một không gian véc-tơ thực  $n$ -chiều. *Tích vô hướng chính tắc* của hai véc-tơ  $\vec{x}$  và  $\vec{y}$  trên  $\mathbb{R}^n$ , kí hiệu  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  hay  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  hay  $\vec{x}\vec{y}$ , được cho bởi

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (0.1.1)$$

ở đó  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  và  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Tích vô hướng đó cảm sinh *chuẩn*  $|\cdot| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$  trên  $\mathbb{R}^n$  bởi đẳng thức

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \quad (0.1.2)$$

Một *cơ sở trực chuẩn* của không gian  $\mathbb{R}^n$  là một hệ gồm  $n$  véc-tơ có thứ tự  $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n\}$  thoả mãn

$$\vec{\xi}_i \cdot \vec{\xi}_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j, \\ 0 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

## 1.2 Một số ví dụ

**Ví dụ 1.2.1.** Hệ véc-tơ  $\{\vec{e}_1(1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2(0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n(0, 0, \dots, 1)\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^n$ . Nó được gọi là *cơ sở chính tắc* của  $\mathbb{R}^n$ .

**Ví dụ 1.2.2.** Hệ véc-tơ

$$\{\vec{e}_1(1, 0, 0), \vec{e}_2(0, \cos \alpha, \sin \alpha), \vec{e}_3(0, -\sin \alpha, \cos \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^3$ .

## §2 TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA 2 VÉC-TƠ TRONG $\mathbb{R}^3$

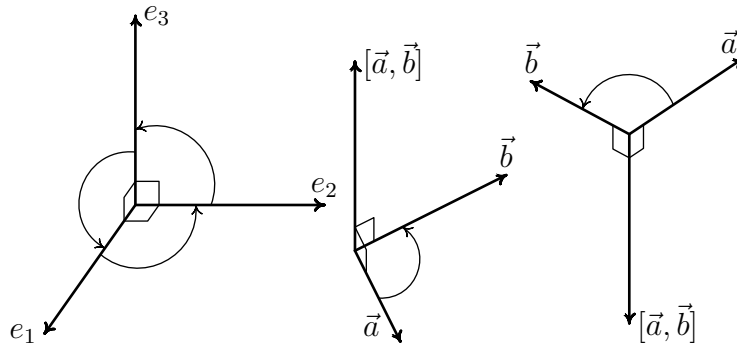
Nội dung của mục này được viết dựa trên 2 tài liệu [7], [8].

### 2.1 Định nghĩa và ví dụ

**Định nghĩa 2.1.1.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  trong không gian  $\mathbb{R}^3$ . *Tích có hướng* (hay còn gọi là tích véc-tơ) của hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  là một véc-tơ  $\vec{c}$ , kí hiệu  $[\vec{a}, \vec{b}]$  hay  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  hay  $\vec{a} \times \vec{b}$ , được xác định như sau:

1. Nếu  $\vec{a} = \vec{0}$  hoặc  $\vec{b} = \vec{0}$  thì  $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ .
2. Nếu  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và  $\vec{b} \neq \vec{0}$  thì
  - $[\vec{a}, \vec{b}]$  vuông góc với 2 véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Tức là,  $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{a} = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{b} = 0$ ;
  - Bộ ba  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  cùng hướng với  $\{\vec{e}_1(1, 0, 0), \vec{e}_2(0, 1, 0), \vec{e}_3(0, 0, 1)\}$ , nghĩa là ma trận chuyển từ cơ sở  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  sang cơ sở  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  có định thức dương;
  - $|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ .

**Ví dụ 2.1.1.** Trong không gian  $\mathbb{R}^3$  cho cơ sở chính tắc  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ . Khi đó  $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3, [\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1, [\vec{e}_3, \vec{e}_1] = \vec{e}_2$ .



Hình 0.2.1. Tích có hướng của 2 véc-tơ trong không gian  $\mathbb{R}^3$

## 2.2 Một số tính chất hay dùng

**Tính chất 2.2.1.** Với 3 véc-tơ  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3), \vec{c}(c_1, c_2, c_3)$  trong không gian  $\mathbb{R}^3$ , ta có:

1.  $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}];$
2.  $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}];$
3.  $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix};$

$$4. (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**Định lí 2.2.2 (7).** Trong không gian  $\mathbb{R}^3$  cho 4 điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Chúng ta có

1. Diện tích của tam giác  $ABC$  được tính bởi công thức

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|;$$

2. Thể tích của tứ diện  $ABCD$  được tính bởi công thức

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) \right|.$$

**Định lí 2.2.3.** Với 4 véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  và  $\vec{d}$  trong không gian  $\mathbb{R}^3$ , ta có:

$$\langle [\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}] \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

(0.2.1)

### Chứng minh

Bạn đọc dùng biểu thức tọa độ của tích có hướng 2 véc-tơ kiểm tra trực tiếp như bài tập.  $\square$

## §3 PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẲNG CỰ TRONG KHÔNG GIAN ƠCLÍT

Nội dung của mục này được viết dựa trên tài liệu [7].

### 3.1 Định nghĩa và ví dụ

**Định nghĩa 3.1.1.** Một ánh xạ  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  được gọi là một *phép biến đổi Ơclít* (Euclidean motion) hay *phép biến đổi đẳng cự* của  $\mathbb{R}^n$  nếu nó được

cho bởi  $\Phi : x \mapsto Ax + b$ , ở đó  $b \in \mathbb{R}^n$  và

$$A \in \mathbf{O}(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^t X = I\}.$$

Một ánh xạ đẳng cự  $\Phi$  được gọi là *bảo toàn hướng* nếu

$$A \in \mathbf{SO}(n) = \{X \in \mathbf{O}(n) \mid \det X = 1\}.$$

**Ví dụ 3.1.1.** Trong không gian  $\mathbb{R}^n$ ,

- Phép tịnh tiến  $T_v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x + v$ , ở đó  $v \in \mathbb{R}^n$ , là phép biến đổi đẳng cự bảo toàn hướng.
- Phép đối xứng qua siêu phẳng

$$D_{\{x_n=0\}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

là một phép biến đổi đẳng cự không bảo toàn hướng.

**Ví dụ 3.1.2.** Trên mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$ , phép biến đổi đẳng cự

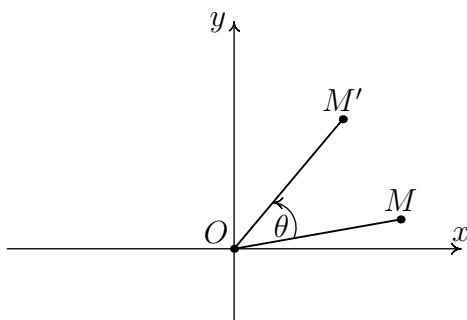
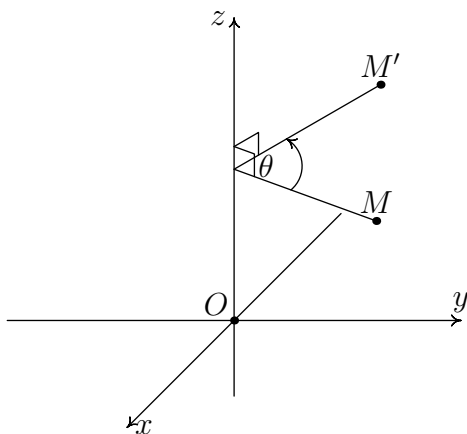
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (0.3.1)$$

là phép quay quanh gốc tọa độ  $O$ , góc quay  $\theta$  (Hình 0.3.1). Nó là một phép đẳng cự bảo toàn hướng.

**Ví dụ 3.1.3.** Trong không gian  $\mathbb{R}^3$ , phép biến đổi đẳng cự

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (0.3.2)$$

là phép quay quanh trục  $Oz$ , góc quay  $\theta$  (Hình 0.3.2). Nó là một phép đẳng cự bảo toàn hướng.

Hình 0.3.1. *Phép quay quanh gốc tọa độ trong  $\mathbb{R}^2$* Hình 0.3.2. *Phép quay quanh trục  $Oz$  trong  $\mathbb{R}^3$*

### 3.2 Tính chất

Định lý cơ bản của hình học Ôclít sau cho ta xác định một phép biến đổi đẳng cự trong không gian  $\mathbb{R}^n$ .

**Định lý 3.2.1 (Xem [4]).** Cho  $\{O : \xi_i\}$  và  $\{O' : \eta_i\}$  là 2 mục tiêu trực chuẩn trong không gian Ôclít  $\mathbb{R}^n$ . Khi đó tồn tại duy nhất một phép biến đổi đẳng cự  $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  sao cho

$$\Phi(O) = O' \text{ và } \overrightarrow{\Phi}(\xi_i) = \eta_i, \forall i = 1, \dots, n.$$

## §4 ĐẠO HÀM CỦA HÀM VÉC-TƠ

Nội dung của mục này được viết dựa trên tài liệu [9].

### 4.1 Ma trận Jacobi của hàm nhiều biến

**Định nghĩa 4.1.1.** Cho  $U$  mở trong  $\mathbb{R}^n, f : U \rightarrow \mathbb{R}, x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$  là một hàm liên tục. Nếu tồn tại

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h}$$

thì giá trị này gọi là đạo hàm riêng thứ  $i$  của  $f$  tại  $x_0$ , kí hiệu  $D_i f(x_0)$  hoặc  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$  hoặc  $f_{x_i}(x_0)$ , với  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Cho ánh xạ  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  khả vi tại  $a$ . Khi đó, ma trận

$$f'(a) \text{ hay } Df(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{pmatrix} \quad (0.4.1)$$

được gọi là ma trận Jacobi của hàm  $f$  tại  $a$ .

**Ví dụ 4.1.1.** Cho  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (x^2, y^3, x - 2y)$ . Khi đó,

$$f'(a, b) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 3b^2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

với hai số thực  $a, b$ .

## 4.2 Tính chất

**Định lí 4.2.1 (Quy tắc lấy đạo hàm của hàm số hợp).**

Cho hàm số  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \longrightarrow \mathbb{R}^m, x \longmapsto f(x) = y$  khả vi tại  $a$  và hàm số  $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$  khả vi tại  $f(a)$ . Khi đó  $F = g \circ f$  khả vi tại  $a$  và ta có

$$D_j F_i(a) = \sum_{l=1}^m D_l g_i(f(a)) \cdot D_j f_l(a), \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}. \quad (0.4.2)$$

**Ví dụ 4.2.1.** Cho  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (a, b) \longmapsto (a^2, b^3, a + b)$  và

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x + y^2, x^2 + z).$$

Khi đó  $F = g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (a, b) \longmapsto (a^2 + b^6, a^4 + a + b)$ .

Ma trận Jacobi của  $f, g$  và  $F$  lần lượt là:

$$f'(a_0, b_0) = \begin{pmatrix} 2a_0 & 0 \\ 0 & 3b_0^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g'(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2y_0 & 0 \\ 2x_0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F'(a_0, b_0) = \begin{pmatrix} 2a_0 & 6b_0^5 \\ 4a_0^3 + 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta kiểm tra lại công thức (0.4.2)

$$\begin{aligned} 2a_0 &= 1.2a_0 + 2y_0.0 + 0.1, \\ 6b_0^5 &= 1.0 + 2y_0.3b_0^2 + 0.1 = 6.b_0^3.b_0^2, \\ 4a_0^3 + 1 &= 2x_0.2a_0 + 0.0 + 1.1 = 4a_0^2.a_0 + 1, \\ 1 &= 2x_0.0 + 0.3b_0 + 1.1. \end{aligned}$$

**Hệ quả 4.2.2.** Cho các  $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả vi tại  $t_0$  với  $i = 1, \dots, m$  và  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả vi tại  $(g_i(t_0))$ . Khi đó

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(g_1(t), \dots, g_m(t))$$

là một hàm khả vi tại  $t_0$  và

$$F'(t_0) = \sum_{j=1}^m (D_j f)(g_i(t_0)) g_j'(t_0), \quad i = \overline{1, n}.$$

## §5 HẠNG CỦA ÁNH XẠ KHẢ VI

Nội dung mục này được viết dựa trên [9].

### 5.1 Vi phân

**Định lý 5.1.1.** Cho tập  $U$  mở trong  $\mathbb{R}^n$  và  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  khả vi lớp  $C^r$  tại  $a \in U$ . *Hạng của  $f$  tại  $a$ , kí hiệu  $\text{rank}_a f$ , chính là hạng của ma trận Jacobi của  $Df$  tại  $a$ , tức là*

$$\text{rank}_a f := \text{rank}(Df(a)).$$

(0.5.1)

**Nhận xét.** Chúng ta dễ thấy rằng  $\text{rank}_a f \leq \min\{m, n\}$ .

Từ đó, ta có định nghĩa sau.

**Định nghĩa 5.1.2.** Nếu  $\text{rank}_a f = \min\{m, n\}$  thì  $a$  được gọi là *điểm chính quy* (regular point) của  $f$ . Ngược lại, ta nói  $a$  là *điểm kì dị* (singular point) của  $f$ .

**Định nghĩa 5.1.3.** Cho hai tập  $U, V$  mở trong  $\mathbb{R}^n$  và  $f : U \rightarrow V$  là song ánh. Nếu  $f$  và  $f^{-1}$  đều khả vi lớp  $C^k$  thì  $f$  gọi là *vi phôi lớp  $C^k$* . Vi phôi lớp  $C^\infty$  gọi là *vi phôi trơn*.

Cho tập  $U$  mở trong  $\mathbb{R}^n$  và  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ta nói  $f$  *vi phôi trơn địa phương* tại  $x_0$  nếu tồn tại một lân cận  $U_0 \subset U$  sao cho  $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow f(U_0)$  là vi phôi trơn.

## 5.2 Định lí hàm ẩn

Định lí hàm ẩn là định lí trung tâm của giải tích hàm nhiều biến số. Tuy nhiên, việc chứng minh nó đòi hỏi phải sử dụng nhiều kiến thức vượt khỏi kiến thức của sinh viên năm 3 nên ta chấp nhận định lí như sau.

**Định lí 5.2.1 (Định lí hàm ẩn).** Cho  $U, V$  tương ứng là các tập mở trong  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  và  $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  là một hàm khả vi trên  $U \times V$ . Nếu  $f(x_0, y_0) = 0$  tại một điểm  $(x_0, y_0) \in U \times V$  và

$$\det \left( D_{n+j} f(x_0, y_0) \right)_{m \times m} \neq 0.$$

Khi đó tồn tại các lân cận  $U(x_0), V(y_0)$  tương ứng của  $x_0$  và  $y_0$  trong  $U, V$  và tồn tại duy nhất một hàm  $g : U(x_0) \rightarrow V(y_0)$  khả vi sao cho

$$f(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in U(x_0). \quad (0.5.2)$$

Hàm  $g$  được gọi là hàm ẩn địa phương xác định bởi phương trình  $f(x, y) = 0$ .

**Ví dụ 5.2.1.** Cho  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2$ .

Khi đó  $F(1, 1) = 0$  và  $DF(x, y) = (2x \ 2y)$ , suy ra  $\det D_y F(1, 1) = 2 \neq 0$ . Do đó ta có thể giải phương trình  $x^2 + y^2 - 2 = 0$  theo  $y$  một cách địa