

DOÃN MINH CƯỜNG (Chủ biên)
TRỊNH HOÀI DƯƠNG - TRẦN VĂN KHẢI
ĐỖ THANH SƠN

ÔN THI VÀO LỚP **10** TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN **MÔN TOÁN**



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

DOÃN MINH CƯỜNG (Chủ biên)
TRỊNH HOÀI DƯƠNG - TRẦN VĂN KHẢI - ĐỖ THANH SƠN

ÔN THI VÀO LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN
MÔN TOÁN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHÂN CÔNG BIÊN SOẠN

Doãn Minh Cường : Chủ biên, biên soạn các chuyên đề 1, 2, 3, 4, 8
Trịnh Hoài Dương : Biên soạn các chuyên đề 5, 6, 7
Trần Văn Khải
và Trịnh Hoài Dương : Biên soạn các chuyên đề 9, 15, 16, 17, 18, 19, 20
Đỗ Thanh Sơn : Biên soạn các chuyên đề 10, 11, 12, 13, 14.

MỘT SỐ KÍ HIỆU, VIẾT TẮT DÙNG TRONG SÁCH

THPT :	Trung học phổ thông ;
ĐHKHTN :	Đại học Khoa học Tự nhiên ;
ĐHSP :	Đại học Sư phạm ;
ĐHSPHN :	Đại học Sư phạm Hà Nội ;
ĐHQG :	Đại học Quốc gia ;
ĐHQGHN :	Đại học Quốc gia Hà Nội ;
GTLN :	Giá trị lớn nhất ;
GTNN :	Giá trị nhỏ nhất ;
HSG :	Học sinh giỏi ;
VT :	Vế trái ;
VP :	Vế phải ;
đpcm :	điều phải chứng minh ;
$(x = \pm a; y = \mp b)$:	$(x = a; y = -b)$ hoặc $(x = -a; y = b)$.

Lời nói đầu

Hiện nay, mạng lưới các trường Trung học phổ thông chuyên (THPT chuyên) đã phát triển ở khắp các tỉnh, thành phố cả nước. Trong các kì thi vào THPT chuyên, ngoài môn thi chuyên, các em học sinh đều phải làm 3 bài thi bắt buộc là Toán, Ngữ văn, Tiếng Anh.

Nhằm giúp các em học sinh, các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh có một tài liệu ôn thi, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã tổ chức biên soạn bộ sách “*Ôn thi vào lớp 10 Trung học phổ thông chuyên*” gồm các môn học: Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học, Ngữ văn, Tiếng Anh. Cuốn sách “*Ôn thi vào lớp 10 Trung học phổ thông chuyên - Môn Toán*” là một cuốn trong bộ sách này. Để có thể bám sát nội dung các đề thi vào THPT chuyên, chúng tôi đã mời các tác giả là những giáo viên dạy Toán lâu năm, nhiều kinh nghiệm của một số trường chuyên có tiếng trong cả nước tham gia biên soạn. Các tác giả của tài liệu này là các thầy giáo:

- Doãn Minh Cường (chủ biên) (THPT Chuyên – ĐHSP Hà Nội)
- Đỗ Thanh Sơn (THPT chuyên ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)
- Trần Văn Khải và Trịnh Hoài Dương (THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam).

Cuốn sách gồm ba phần: *Phần thứ nhất gồm 20 chuyên đề bao quát toàn bộ các nội dung cơ bản của môn Toán cấp Trung học cơ sở và nội dung các đề thi tuyển sinh vào các trường THPT chuyên. Phần thứ hai giới thiệu với bạn đọc 9 đề thi chính thức năm học 2012 - 2013 của một số trường THPT chuyên và 2 đề thi tự luyện. Phần thứ ba là hướng dẫn giải các bài tập của các chuyên đề và đáp án hoặc hướng dẫn giải các đề tham khảo.*

Nói chung, mỗi chuyên đề gồm 3 phần:

- A. Kiến thức cơ bản
- B. Một số kĩ thuật đặc trưng và ví dụ minh họa
- C. Bài tập tự luyện.

Vì khuôn khổ cuốn sách có hạn nên các tác giả chỉ tập trung trình bày những nội dung điển hình nhất thuộc hai loại:

– Các nội dung cơ bản sát với nội dung bài thi môn Toán vòng 1 cho tất cả các thí sinh dự thi vào THPT chuyên.

– Một số nội dung nâng cao đòi hỏi những kĩ năng đặc biệt, hướng tới bài thi môn Toán vòng 2 cho các học sinh thi vào chuyên Toán.

Thời gian chuẩn bị bản thảo không nhiều mà lại mong muốn cuốn sách phục vụ đồng đảo các bạn học sinh thi vào các lớp chuyên, các trường chuyên của cả nước, vì vậy cuốn sách khó tránh khỏi những thiếu sót. Các tác giả rất mong nhận được thư góp ý của các em học sinh, các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh. Mọi ý kiến góp ý xin gửi về theo địa chỉ : *Ban Toán - Tin, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - 187B Giảng Võ - Hà Nội.*

Các tác giả xin chân thành cảm ơn TS. Trần Hữu Nam, Trưởng Ban biên tập sách Toán Tin đã đọc, góp ý bản thảo và giúp các tác giả tuyển chọn phần giới thiệu các đề thi tham khảo, các biên tập viên, Ths. Nguyễn Ngọc Tú, Ths. Đặng Văn Tuyến đã biên tập, đọc kĩ bản thảo, tạo các điều kiện để các tác giả hoàn thành cuốn sách này.

Hi vọng rằng, cuốn sách sẽ là tài liệu tham khảo hữu ích giúp các em học sinh chuẩn bị tốt nhất cho kì thi vào trường THPT chuyên sắp tới của mình.

Thay mặt các tác giả

Chủ biên

DOÃN MINH CƯỜNG

Phần một

CÁC CHUYÊN ĐỀ

A. SỐ HỌC

Chuyên đề 1

CHIA HẾT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên thường có bài toán chia hết. Loại bài tập này đòi hỏi học sinh thành thạo các kỹ năng biến đổi đồng nhất (rút gọn biểu thức, phân tích thành nhân tử), ngoài ra học sinh cũng cần nắm vững một số khái niệm cơ bản: số nguyên, số nguyên tố, hai số nguyên tố cùng nhau, sự chia hết của hai số nguyên.

1. Phép chia trong tập số nguyên

Định lý: Nếu đã cho hai số nguyên a, b trong đó $b \neq 0$ thì luôn thực hiện được phép chia a cho b tức là tìm được duy nhất một cặp số nguyên q (thương), r (số dư) thỏa mãn điều kiện $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$.

Nhận xét thường dùng: Khi chia $n + 1$ số nguyên cho n ($n \geq 1$) luôn tìm được ít nhất hai số dư bằng nhau.

2. Khái niệm chia hết

Nếu a, b là hai số nguyên đã cho (trong đó $b \neq 0$) thì ta nói a chia hết cho b và kí hiệu là $a : b$ nếu số dư của phép chia a cho b là 0 , tức là nếu tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$.

Nếu a chia hết cho b thì ta cũng nói:

a là bội số nguyên của b ;

b là ước số nguyên của a ;

b chia hết a (và viết là $b \mid a$).

Nhận xét thường dùng: Trong n số nguyên liên tiếp luôn có ít nhất một số chia hết cho n .

3. Hai số nguyên tố cùng nhau

Hai số nguyên a, b được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu hai số này chỉ có một ước số chung duy nhất là 1.

4. Số nguyên tố

Số nguyên dương p là số nguyên tố nếu $p > 1$ và p chỉ có đúng hai ước số nguyên là 1 và p .

5. Một số tính chất thường dùng

a) *Bắc cầu*: Nếu $a:b$ và $b:c$ thì $a:c$.

b) *Cộng*: Nếu $a:m$ và $b:m$ thì $(a \pm b):m$.

c) *Nhân*: Nếu $a:m$ và $b:n$ thì $ab:mn$.

d) *Bội số*: Nếu k nguyên và $a:n$ thì $ka:n$.

e) *Tuyến tính*: Nếu $ka + hb + lc = 0$, trong đó $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$; $k, l, h \in \mathbf{Z}^*$; $a:d$ thì b sẽ chia hết cho d khi và chỉ khi c chia hết cho d .

f) *Rút gọn*: Nếu $ab:c$ và b, c nguyên tố cùng nhau thì $a:c$.

g) Nếu p nguyên tố và p là ước của ab thì p là ước của a hoặc b . Đặc biệt, nếu p nguyên tố và $a^2:p$ thì $a:p$.

h) Nếu $a, b \in \mathbf{Z}, a \neq b, n \in \mathbf{N}$ thì $(a^n - b^n):(a - b)$.

i) Nếu $a, b \in \mathbf{Z}, a \neq -b, n \in \mathbf{N}$ thì $(a^{2n+1} + b^{2n+1}):(a + b)$.

j) Nếu m, n là hai số nguyên tố cùng nhau đều là ước của số nguyên a thì mn cũng là ước của a . Đặc biệt, nếu hai số nguyên tố khác nhau p, q đều là ước của số nguyên a thì tích pq cũng là ước của a .

B. MỘT SỐ KỸ THUẬT ĐẶC TRƯNG VÀ VÍ DỤ MINH HOẠ

1. Kỹ thuật 1: Sử dụng kết quả hiển nhiên (suy trực tiếp từ nguyên lý Đi-rích-lê): Trong hai số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 2, do đó tích hai số nguyên liên tiếp luôn chẵn; trong 3 số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 3, do đó tích 3 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 6;

Ví dụ 1. Chứng minh rằng tích 2 số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 8; tích 3 số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 48.

Giải

Hai số chẵn liên tiếp $2k$ và $2k + 2$ có tích $4k(k + 1) : 8$.

Ba số chẵn liên tiếp $2k; 2k + 2; 2k + 4$ có tích $8k(k + 1)(k + 2) : 48$.

2. Kỹ thuật 2: Phân tích thành nhân tử.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi n nguyên, số $A = n^3 - n$ luôn chia hết cho 6.

Giải

Phân tích thành nhân tử ta được $A = (n - 1)n(n + 1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp, do đó $A : 6$.

3. Kỹ thuật 3: Thêm bớt một bội.

Ví dụ 3. (THPT chuyên – ĐHKHTN – ĐHQGHN, năm 1996) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, số $A = n^3 + 5n$ luôn chia hết cho 6.

Giải

Ta có $A = (n^3 - n) + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$. Do đó $A : 6$ với mọi n .

4. Kỹ thuật 4: Sử dụng tính chất $(a^n - b^n) : (a - b)$ nếu $a \neq b, n \in \mathbf{N}^*$,
 $a, b \in \mathbf{Z}$ hoặc dùng tính chất $(a^{2n+1} + b^{2n+1}) : (a + b)$ nếu $a \neq -b, n \in \mathbf{N}^*$,
 $a, b \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 4. (THPT Chuyên – ĐHSPHN, năm 1998) Chứng minh rằng với mọi n tự nhiên, số $A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n)$ luôn chia hết cho 91.

Giải

Vì $91 = 13 \cdot 7$ đồng thời 13 và 7 là hai số nguyên tố khác nhau nên để chứng minh khẳng định đã cho, chỉ cần chứng minh A chia hết cho 13 và A chia hết cho 7. Mặt khác, $A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n)$ chia hết cho $25 - 18 = 12 - 5 = 7$.

Tương tự, $A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n)$ chia hết cho $25 - 12 = 18 - 5 = 13$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. (THPT Chuyên – ĐHSPhN, năm 2001) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , luôn có $A = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Giải

$$\text{Để thấy } B = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lại có $2A = (n^5 + 1^5) + [(n-1)^5 + 2^5] + [(n-2)^5 + 3^5] + \dots + (1^5 + n^5)$ chia hết cho $n+1$ vì mỗi số hạng ở vế phải đều chia hết cho $n+1$. Tương tự, $2A - 2n^5 = [(n-1)^5 + 1^5] + [(n-2)^5 + 2^5] + \dots$ chia hết cho n , do đó $2A : n$. Mà n và $n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên $2A : n(n+1)$ hay $2A : 2B$.

Từ đó $A : B$ (đpcm).

5. Kỹ thuật 5: Thay bằng một bội số.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, số $A = n^2 + 3n + 5$ không phải là bội số nguyên của 121.

Giải

Nếu $A : 121$ thì $4A = (2n+3)^2 + 11 : 121$, suy ra $(2n+3)^2 : 11$, do đó $2n+3$ chia hết cho 11, từ đó lại suy ra $(2n+3)^2 : 121$ và $4A = (2n+3)^2 + 11$ không chia hết cho 121, vô lí (đpcm).

6. Kỹ thuật 6: Xét các số dư.

Ví dụ 7. (THPT chuyên – ĐHKHTN – ĐHQGHN, năm 1999)

Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $n^2 + 9n - 2$ chia hết cho 11.

Giải

Gọi r là dư của phép chia n cho 11 thì $0 \leq r < 11$ và $n^2 + 9n - 2$ cùng dư với $r^2 + 9r - 2$ khi chia cho 11. Sử dụng máy tính cầm tay, mode TABLE, ta được bảng giá trị của $f(r) = r^2 + 9r - 2$ với $r = 0; 1; 2; \dots; 10$ trong đó chỉ có hai giá trị là bội của 11, đó là $f(6) = 88; f(7) = 110$. Do đó các số nguyên dương cần tìm là và chỉ là các số có dư là 6 hoặc 7 khi chia cho 11.

Nhận xét: Nếu $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên và m là một số nguyên dương đã cho thì để tìm các số nguyên n sao cho $f(n)$ là bội của m ta chỉ cần tính các giá trị của $f(x)$ với $x = 0; 1; 2; \dots; m - 1$.

C. BÀI TẬP

- 1.1. Chứng minh rằng nếu số nguyên n không chia hết cho 2 và 3 thì số $A = 4n^2 + 3n + 5$ chia hết cho 6.
- 1.2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , số $A = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120$ chia hết cho 24.
- 1.3. Tìm các số nguyên dương n sao cho số $A = n^2 + 3n - 38$ chia hết cho 49.
- 1.4. Chứng minh rằng với mọi số n chẵn đều có số $A = n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$ chia hết cho 384. (*Thi HSG Toán toàn quốc lớp 9, năm 1970*)
- 1.5. Chứng minh rằng với mọi n lẻ, số $A = n^4 + 7(7 + 2n^2)$ chia hết cho 64.
- 1.6. Chứng minh rằng với mọi n chẵn, $n^3 + 1964n : 48$.
- 1.7. Chứng minh rằng số $A = n^3 + 3n^2 - n - 3$ chia hết cho 48 với mọi n lẻ.
- 1.8. Chứng minh rằng số $A = n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ chia hết cho 512 với mọi n lẻ.
- 1.9. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbf{Z}$, số $A = n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3.
- 1.10. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , số $A = 9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ không là bội số của 343.
- 1.11. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , số $A = 4n^3 - 6n^2 + 3n + 37$ không là bội số của 125.
- 1.12. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , số $A = 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ chia hết cho 17.
- 1.13. Chứng minh rằng $2^{8n}5^{6n} - 1980^n - 441^n + 1 : 1979, \forall n \in \mathbf{N}$.
- 1.14. Chứng minh rằng với mọi n nguyên lẻ, số $A = 118^n - 101^n - 16^n - 1$ luôn chia hết cho 3978.

- 1.15.** Cho m, n là hai số nguyên. Chứng minh rằng hai số $a = m + 2n, b = n + 2m$ cùng chia hết cho 3 hoặc cùng không chia hết cho 3.
- 1.16.** Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên. Hỏi a, b, c có nhất thiết phải là các số nguyên hay không? Tại sao?
(*THPT chuyên – ĐHKHTN – ĐHQGHN, năm 2001*)
- 1.17.** Cho số tự nhiên $n > 3$. Gọi q là thương và r là dư của phép chia 2^n cho 10. Chứng minh rằng $qr \vdots 6$.
(*Thi HSG Toán lớp 9 toàn quốc, năm 1994*)
- 1.18.** Cho hai số nguyên dương a, b . Chứng minh rằng $5a^2 + 15ab - b^2$ chia hết cho 49 khi và chỉ khi $3a + b$ chia hết cho 7.

Chuyên đề 2

SỐ NGUYÊN TỐ. SỐ CHÍNH PHƯƠNG. SỐ LẬP PHƯƠNG ĐÚNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Vì mọi số tự nhiên đều phân tích được thành các nhân tử nguyên tố nên việc nghiên cứu các số tự nhiên quy về việc nghiên cứu các số nguyên tố. Các số chính phương (bình phương của một số nguyên) và các số lập phương đúng (lập phương của một số nguyên) có những tính chất lí thú và cũng thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi, thi tuyển vào các trường chuyên.

1. Số nguyên tố

Các số nguyên dương $a > 1$ được chia thành hai loại: *số nguyên tố* và *hợp số*. Nếu a chỉ có đúng hai ước số nguyên (là 1 và a) thì a là số nguyên tố; nếu ngược lại thì a là hợp số.

2. Phân tích một số tự nhiên thành tích các thừa số nguyên tố

Mỗi số tự nhiên $a \neq 0$ đều có thể phân tích thành tích các thừa số nguyên tố, tức là viết được dưới dạng $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}$, trong đó $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ là những số nguyên tố phân biệt và $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ là những số tự nhiên.

Chú ý: Nếu không kể đến thứ tự các thừa số thì sự phân tích trên là *duy nhất* và được gọi là *dạng phân tích tiêu chuẩn* của số tự nhiên a.

3. Số chính phương và số lập phương đúng

Các số chính phương là các bình phương của số nguyên, tức là các số dạng n^2 , trong đó n là số nguyên.

Các số lập phương đúng là các lập phương của số nguyên, tức là các số dạng n^3 , trong đó n là số nguyên.

4. Một số tính chất thường dùng

a) Tích của hai số nguyên chia hết cho số nguyên tố p khi và chỉ khi một trong hai thừa số chia hết cho p.

b) Số chính phương n^2 chia hết cho số nguyên tố p khi và chỉ khi $n \vdots p$. Số chính phương n^2 chia hết cho số nguyên tố p thì cũng chia hết cho p^2 .

c) Các số chính phương chẵn đều chia hết cho 4. Các số chính phương lẻ đều có dư 1 khi chia cho 8.

d) Các số chính phương chia hết cho 3 thì cũng chia hết cho 9. Các số chính phương không chia hết cho 3 đều có dư 1 khi chia cho 3.

e) Nếu tích hai số nguyên $n = a.b$ là số chính phương thì hai thừa số a, b có dạng $a = m.c^2, b = m.d^2$.

f) Giữa hai số chính phương liên tiếp n^2 và $(n+1)^2$ không có số chính phương nào.

g) Nếu $a = n^3$ là số lập phương đúng không chia hết cho 3 thì khi chia số a cho 9 ta được dư 1 (nếu n chia 3 dư 1) hoặc dư 8 (nếu n chia 3 dư 2).

B. MỘT SỐ KỸ THUẬT ĐẶC TRƯNG VÀ VÍ DỤ MINH HOẠ

1. Kỹ thuật 1: Phân tích thành nhân tử.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên lớn hơn 1 thì số $a = n^4 + 4^n$ là hợp số.

Giải

Nếu n chẵn thì a chẵn và lớn hơn 2 nên a là hợp số.

Nếu n lẻ thì $n = 2k + 1, (k \in \mathbf{Z}, k \geq 1)$, do đó

$$\begin{aligned}
 a &= n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2k+1} = n^4 + \left(2^{2k+1}\right)^2 = \left(n^2 + 2^{2k+1}\right)^2 - n^2 \cdot 2^{2k+2} \\
 &= \left(n^2 + 2^{2k+1} + n \cdot 2^{k+1}\right)\left(n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1}\right).
 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$n^2 + 2^{2k+1} \geq 2n \cdot \sqrt{2^{2k+1}} = n\sqrt{2^{2k+3}} > n\sqrt{2^{2k+2}} = n \cdot 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow n^2 + 2^{2k+1} \geq n \cdot 2^{k+1} + 1 \Rightarrow n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1} > 1 \text{ (dấu "=" không xảy ra)}.$$

Từ đó suy ra a cũng là hợp số.

2. Kỹ thuật 2: Sử dụng một số tính chất đặc trưng của các số chính phương.

Các số chính phương có một số dấu hiệu đặc trưng thiết lập những điều kiện cần để nhận biết một số nguyên có phải là số chính phương hay không. Một số dấu hiệu đặc trưng thường dùng của các số chính phương là:

– Mọi số chính phương chẵn đều chia hết cho 4; mọi số chính phương lẻ khi chia cho 8 đều có dư là 1. Vì vậy, các số dương chẵn không là bội số của 4 đều không là số chính phương; các số dương lẻ mà khi chia 8 không cho dư 1 cũng không phải là số chính phương.

– Mọi số chính phương khi chia cho 3 đều chỉ có dư là 0 hoặc 1; nếu số chính phương chia hết cho 3 thì cũng chia hết cho 9. Vì vậy nếu số dương n có dư 2 khi chia cho 3 thì không là số chính phương.

– Chữ số tận cùng của số chính phương không thể là 2; 3; 7; 8.

– Một số chính phương là bội của số nguyên tố p thì cũng là bội của p^2 .

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu a, b là hai số lẻ thì số $n = a^2 + b^2$ không phải là số chính phương.

Giải

Vì a, b lẻ nên n chẵn, do đó nếu n là số chính phương thì n phải chia hết cho 4. Mặt khác, vì a^2, b^2 là những số chính phương lẻ nên a^2, b^2 đều có dư 1 khi chia cho 4, do đó $n = a^2 + b^2$ có dư 2 khi chia cho 4, vô lí (đpcm).

Ví dụ 3. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất là tổng của 19 số nguyên liên tiếp $k + 1, k + 2, \dots, k + 19$ là số chính phương.

Giải

$$\text{Xét tổng } S = (k + 1) + (k + 2) + \dots + (k + 19) = 19(k + 10).$$

Vì S là bội của 19 (nguyên tố) nên nếu S chính phương thì S chia hết cho 19^2 , do đó $(k + 10)$ phải là bội của 19. Vậy số k nhỏ nhất thoả mãn là $k = 9$.

3. Kỹ thuật 3: Kẹp giữa hai số chính phương liên tiếp.

Để chứng minh một số nguyên a không phải là số chính phương, ta có thể tìm cách "kẹp" a giữa hai số chính phương liên tiếp: $n^2 < a < (n + 1)^2$ rồi suy ra a không chính phương.

Ví dụ 4. Tìm số nguyên dương n sao cho $n(n + 1)$ là số chính phương.

Giải

Ta thấy $n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2$, $\forall n \in \mathbf{Z}^+$, do đó $n(n + 1)$ không phải là số chính phương. Vì vậy không có số nguyên dương n nào thoả mãn yêu cầu bài toán.

4. Kỹ thuật 4: Xét các lớp đồng dư.

Cơ sở của phương pháp này là nhận xét sau đây: Với mỗi số tự nhiên $n > 1$, kí hiệu D_r là tập hợp các số nguyên có dư r khi chia cho n .

Trong n số $m_0, m_1, m_2, m_3, \dots, m_{n-1}$, trong đó $m_i \in D_i$, ($i = 0; 1; 2; \dots; n - 1$) luôn tìm được một số chia hết cho n .

Ví dụ 5. Tìm số nguyên dương n sao cho $n - 10; n + 10; n + 60$ đều là số nguyên tố.

Giải

Ta thấy $n - 10 = (n - 10) + 0; n + 10 = (n - 10) + 20;$

$n + 60 = (n - 10) + 70$ và ba số $0; 20; 70$ khi chia cho 3 nhận được ba số dư khác nhau, do đó khi chia ba số $n - 10; n + 10; n + 60$ cho 3 ta cũng nhận được ba số dư khác nhau. Vì vậy trong ba số này phải có số chia hết cho 3. Nhưng theo giả thiết, cả ba số đều là số nguyên tố, suy ra $n - 10 = 3 \Rightarrow n = 13$.

Thử lại ta thấy với $n = 13$ thì $n - 10; n + 10; n + 60$ là $3; 23; 73$. Vậy $n = 13$.

C. BÀI TẬP

2.1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p > 3$, số $a = p^2 - 1$ luôn chia hết cho 24.

- 2.2.** Tìm các số nguyên tố p sao cho số $p^2 + 2018$ cũng là số nguyên tố.
- 2.3.** Chứng minh rằng $a = 2^{2^{2013}} + 5$ là hợp số.
- 2.4.** Chứng minh rằng nếu p và $p^2 + 2$ đều là số nguyên tố thì $p^6 + 4$ cũng là số nguyên tố.
- 2.5.** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho cả ba số $n, n + 10, n + 14$ đều là số nguyên tố.
- 2.6.** Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p + 2; p + 6; p + 8; p + 14$ đều là số nguyên tố.
- 2.7.** Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n + 1; n + 3; n + 7; n + 9; n + 13; n + 15$ đều là số nguyên tố.
- 2.8.** Số nào trong các số sau đây là số chính phương ?
 $a = 12345678910111213; b = 1234567891011121314151617;$
 $c = 1234567891011121314151617181920212223.$
- 2.9.** Số $a = 1 + 19^{19} + 93^{199} + 1993^{1994}$ có phải là số chính phương hay không ?
- 2.10.** Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $a = 3^n + 4$ là số chính phương.
- 2.11.** Tìm các số nguyên n sao cho $a = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương.
(THPT chuyên – ĐHKHTN – ĐHQGHN, năm 1992)
- 2.12.** Tìm các số nguyên n sao cho $a = n^2 + 2002$ là số chính phương.
(THPT chuyên – ĐHKHTN – ĐHQGHN, năm 2002)
- 2.13.** Tìm các số tự nhiên lẻ n sao cho $a = n^{2012} + 1$ là số chính phương.
- 2.14.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , số $a = n! + 2014$ đều không phải là số chính phương.
- 2.15.** Tìm tất cả các số chính phương có tổng các chữ số bằng 2013.
- 2.16.** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n - 1$ là số chính phương, trong đó $p_1, p_2, \dots, p_n$ là n số nguyên tố đầu tiên.
- 2.17.** Tìm các số tự nhiên n sao cho $23^n + 1971$ là số chính phương.
- 2.18.** Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $p = n^n + 1, (n \in \mathbb{N}^*)$ biết rằng p có không nhiều hơn 19 chữ số.

(THPT Chuyên – ĐHSPhN, năm 2000)

Chuyên đề 3

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên thường có bài toán chia hết. Loại bài tập này đòi hỏi học sinh thành thạo các kỹ năng biến đổi đồng nhất (rút gọn biểu thức, phân tích thành nhân tử), ngoài ra học sinh cũng cần nắm vững một số khái niệm cơ bản: số nguyên, số nguyên tố, hai số nguyên tố cùng nhau, sự chia hết của hai số nguyên.

Các phương trình nghiệm nguyên rất đa dạng, có nhiều phương pháp giải khác nhau. Không thể kể ra tất cả các dạng phương trình nghiệm nguyên hay liệt kê ra tất cả các phương pháp giải chúng. Tuy vậy, chúng tôi sẽ rất cố gắng tổng kết một số kinh nghiệm giải những phương trình nghiệm nguyên đơn giản.

1. Phương trình nghiệm nguyên

Đó là các phương trình một ẩn hay nhiều ẩn với hệ số nguyên và yêu cầu tìm các nghiệm lấy giá trị trong tập số nguyên. Một ví dụ nổi tiếng về phương trình nghiệm nguyên là *Định lý lớn Phéc-ma* (Fermat) sau đây:

Không tồn tại các nghiệm nguyên khác không x , y và z của phương trình $x^n + y^n = z^n$ trong đó n là một số nguyên lớn hơn 2.

Bài toán có phát biểu cực kì đơn giản này đã làm "nát óc" nhiều thế hệ các nhà toán học trong suốt bốn thế kỉ và chỉ mới được giải quyết bởi Andrew Wiles năm 1993.

2. Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên

Để giải các phương trình nghiệm nguyên, học sinh phải nắm rất vững các kiến thức số học, đại số. Sau đây là một số gợi ý về phương pháp cho các em trong việc giải các phương trình nghiệm nguyên. Nội dung cụ thể và các kỹ năng vận dụng các phương pháp này sẽ được trình bày chi tiết trong phần 2 (Một số kỹ thuật đặc trưng và ví dụ minh họa).

- Phương pháp đánh giá miền giá trị của các biến.
- Phương pháp đưa về phương trình tích.
- Phương pháp kẹp.

- Phương pháp sử dụng tính chất chia hết.
- Phương pháp xuống thang.
- Phương pháp cực hạn.

B. MỘT SỐ KỸ THUẬT ĐẶC TRƯNG VÀ VÍ DỤ MINH HOẠ

1. Kỹ thuật 1: Đánh giá miền giá trị.

Sử dụng các bất đẳng thức, tính chất các số nguyên, tính chia hết để đánh giá miền giá trị của các biến.

(Phương pháp đánh giá miền giá trị của các biến)

Ví dụ 1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - 4xy + 29y^2 = 400$.

Giải

Xem phương trình đã cho là phương trình ẩn x tham số y , ta có $\Delta' = 25(16 - y^2)$ nên $x = 2y \pm 5\sqrt{16 - y^2}$. Phương trình có nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y^2 \in \{0; 1; 4; 9; 16\} \\ 16 - y^2 \in \{0; 1; 4; 9; 16\} \end{cases} \Leftrightarrow y^2 \in \{0; 16\} \Leftrightarrow y \in \{0; \pm 4\}.$$

Sử dụng $x = 2y \pm 5\sqrt{16 - y^2}$, suy ra các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $(x = \pm 20; y = 0), (x = 8; y = 4), (x = -8; y = -4)$.

2. Kỹ thuật 2: Phân tích thành nhân tử.

Bằng cách phân tích thành nhân tử, đưa phương trình đã cho về dạng $f.g = a$ trong đó a là một số nguyên; f, g là hai đa thức chứa biến với hệ số nguyên.

(Phương pháp đưa về phương trình tích)

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x + xy + y = 9$.

(THPT chuyên – ĐHKHTN – ĐHQGHN, năm 2002)

Giải

Viết lại phương trình về dạng $(x + 1)(y + 1) = 10$.

Từ đó $(x + 1)$ là ước số nguyên của 10, do đó $(x + 1) \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$.

Ta có bảng sau

$x + 1$	1	-1	2	-2	5	-5	10	-10
$y + 1$	10	-10	5	-5	2	-2	1	-1
x	0	-2	1	-3	4	-6	9	-11
y	9	-11	4	-6	1	-3	0	-2

(đáp số cho trong hai dòng cuối của bảng).

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi n nguyên, số $A = n^3 - n$ luôn chia hết cho 6.

Giải

Phân tích thành nhân tử ta được $A = (n - 1)n(n + 1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp, do đó $A : 6$.

3. Kỹ thuật 3: Kẹp giữa hai lũy thừa nguyên cùng bậc liên tiếp.

Sử dụng tính chất: Giữa a^n và $(a + 1)^n$ là hai lũy thừa cùng bậc n của hai số nguyên liên tiếp $a, a + 1$ thì không có lũy thừa bậc n của bất cứ số nguyên nào.

(Phương pháp kẹp)

Ví dụ 4. Giải phương trình nghiệm nguyên $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$.

Giải

Vì trong khoảng $(-1; 0)$ không có số nguyên nào nên

$$x^2 + x = x(x + 1) > 0, \forall x \in \mathbf{Z} \setminus \{-1; 0\} \Rightarrow x^2 + x \geq 0, \forall x \in \mathbf{Z}, \text{ do đó}$$

$$x^3 < 1 + x + x^2 + x^3 \leq (x + 1)^3.$$

Vì vậy nếu $(x; y)$ là một nghiệm nguyên của phương trình đã cho thì

$$\begin{cases} y^3 = (x + 1)^3 \\ x \in \{-1; 0\} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) \in \{(x = -1; y = 0), (x = 0; y = 1)\}.$$

Đáp số: $(x = -1; y = 0), (x = 0; y = 1)$.

4. Kỹ thuật 4: Chia hết và chia có dư.

Sử dụng các dấu hiệu chia hết ; chữ số tận cùng của các số chính phương ; đặc điểm về số dư của các số chính phương, các lũy thừa bậc ba đúng của số nguyên khi chia cho 3; 4; 8; 9; ...

(Phương pháp sử dụng tính chia hết và chia có dư)

Ví dụ 5. Giải phương trình nghiệm nguyên $20x^2 + 13y^2 = 2014$.

Giải

Từ phương trình đã cho suy ra khi chia $13y^2$ cho 4 phải có dư là 2. Điều này không bao giờ xảy ra vì khi chia 13 cho 4 ta được dư là 1, còn số chính phương y^2 khi chia cho 4 chỉ có thể có dư là 0 hoặc 1. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

5. Kỹ thuật 5: Xuống thang.

Sử dụng khẳng định hiển nhiên sau đây: Số tự nhiên x chia hết cho mọi lũy thừa với số mũ nguyên dương của số a ($a \geq 2$) khi và chỉ khi $x = 0$.

(Phương pháp xuống thang)

Ví dụ 6. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3 = 2y^3 + 4z^3$.

Giải

Từ phương trình đã cho suy ra $x \vdots 2$, nên $x = 2x_1, (x_1 \in \mathbf{Z})$.

Thế trở lại phương trình ta có $8x_1^3 = 2y^3 + 4z^3 \Leftrightarrow 4x_1^3 = y^3 + 2z^3$.

Tương tự ta lại suy ra $y = 2y_1, (y_1 \in \mathbf{Z})$.

Từ đây lại suy ra $z = 2z_1, (z_1 \in \mathbf{Z})$ và thay trở lại phương trình đã cho ta suy ra $x_1^3 = 2y_1^3 + 4z_1^3$, nghĩa là nếu $(x; y; z)$ là một nghiệm nguyên của phương trình thì $\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}; \frac{z}{2}\right)$ cũng là nghiệm nguyên của phương trình, do đó $\left(\frac{x}{2^2}; \frac{y}{2^2}; \frac{z}{2^2}\right), \dots, \left(\frac{x}{2^n}; \frac{y}{2^n}; \frac{z}{2^n}\right), \dots$ đều là nghiệm nguyên của phương trình.

Đặc biệt, cả ba số nguyên x, y, z đều chia hết cho mọi lũy thừa nguyên dương của số 2, do đó $x = y = z = 0$. Thử lại, ta thấy $x = y = z = 0$ thỏa mãn phương trình. Đáp số: $(x = 0; y = 0; z = 0)$.

6. Kỹ thuật 6: Cực hạn.

Nguyên lý cực hạn có nội dung cực kì hiển nhiên: Nếu $X \subseteq \mathbf{N}, (X \neq \emptyset)$ thì X có phần tử nhỏ nhất (cần phân biệt với nguyên lý khởi đầu cực hạn).

(Phương pháp cực hạn)

Ví dụ 7. Giải lại Ví dụ 6 bằng cách sử dụng nguyên lý cực hạn.

Giải

Ta thấy ngay $(x = 0; y = 0; z = 0)$ là một nghiệm nguyên "tầm thường" của phương trình đã cho. Nếu tập hợp S các nghiệm nguyên không tầm thường của

phương trình khác rỗng thì theo nguyên lí cực hạn, tồn tại $(x_0; y_0; z_0) \in S$ sao cho tổng $|x_0| + |y_0| + |z_0|$ nhỏ nhất.

Theo lập luận trong Ví dụ 6 thì

$$\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right) \in S \text{ mà } \left|\frac{x_0}{2}\right| + \left|\frac{y_0}{2}\right| + \left|\frac{z_0}{2}\right| < |x_0| + |y_0| + |z_0|,$$

điều này trái với giả thiết $|x_0| + |y_0| + |z_0|$ nhỏ nhất. Mâu thuẫn này chứng tỏ phương trình đã cho chỉ có nghiệm tầm thường $(x = 0; y = 0; z = 0)$.

C. BÀI TẬP

Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

- 3.1. $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$. 3.2. $\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = 3$.
- 3.3. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$. 3.4. $y^2 = x(x+1)(x+7)(x+8)$.
- 3.5. $19x^2 + 28y^2 = 729$. 3.6. $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$.
- 3.7. $5(x+y) + 20 = 2xy$. 3.8. $5(x+y) + 25 = 4xy$.
- 3.9. $5(x+y) + 30 = 6xy$.
- 3.10. $5(x+y+z) + 15 = 2xyz, (x, y, z \in \mathbf{Z}^+)$.
- 3.11. $x^3 + 3367 = 2^y, (x, y \in \mathbf{Z}^+)$.
- 3.12. $y(x-1) = x^2 + 2$. (*ĐHKHTN-ĐHQGHN, năm 2000*)
- 3.13. $xy^2 + 2xy - 243y + x = 0$. (*Thi HSG Toán lớp 9 toàn quốc, năm 1976*)
- 3.14. $12x^2 + 6xy + 3y^2 = 28(y+x)$. (*ĐHKHTN-ĐHQGHN, năm 1994*)
- 3.15. $2x^2 - 2xy = 5x - y - 19$. 3.16. $2^x = 3 + 65y, (x, y \in \mathbf{Z}^+)$.
- 3.17. $29x^2 - 28y^2 = 2014$. 3.18. $x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 5y = 15$.
- 3.19. $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$. 3.20. $2002^x - 2001^y = 1, (x, y \in \mathbf{Z}^+)$.
- 3.21. $5^x - 2^y = 1, (x, y \in \mathbf{Z}^+)$. 3.22. $2^x - 3^y = 1, (x, y \in \mathbf{Z}^+)$.
- 3.23. $2^x - 3^y = 7, (x, y \in \mathbf{Z}^+)$.