LÊ ANH VINH - TRỊNH HOÀI DƯƠNG - PHẠM ĐỨC HIỆP
(Sưu tầm và biên soạn)

CÁC KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ

TẬP 1

SONG NGỮ ANH - VIỆT

Dành cho học sinh Trung học cơ sở và Trung học phổ thông

International Mathematics Tournament of the Towns (ITOT)

International Mathematics Competition (IMC)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LÊ ANH VINH - TRỊNH HOÀI DƯƠNG - PHẠM ĐỨC HIỆP
(Sưu tầm và biên soạn)

CÁC KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ

TẬP 1

International Mathematics Tournament of the Towns (ITOT)
International Mathematics Competition (IMC)

SONG NGỮ ANH-VIỆT

Dành cho học sinh Trung học cơ sở
và Trung học phổ thông

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Một số lưu ý khi sử dụng

- Vì muốn giữ lại đúng nguyên dạng đề thi nên một số đề của kì thi ITOT các tác giả giữ nguyên biểu điểm của từng câu.
- Một số kí hiệu toán học được giữ nguyên gốc nên trong sách có cả hai cách kí hiệu, chẳng hạn như kí hiệu góc ($\angle ABC$, $\widehat{ABC}$), phép chia ($5\div3$; $5:3$),...
- Phần Đáp án (Solution) gồm cả tiếng Anh và tiếng Việt sử dụng chung hình minh hoạ, hình vẽ nếu giống hệt nhau...

Tài liệu tham khảo

Các đề được sưu tầm từ Ban tổ chức các kì thi ITOT, IMC và các website

http://www.turgor.ru

http://www.math.toronto.edu

http://www.imc-official.org

MỤC LỤC

LỜI GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây, việc dạy và học bằng tiếng Anh ngày càng nhận được sự quan tâm của các gia đình và nhà trường. Sử dụng các tài liệu tham khảo bằng tiếng Anh hoặc song ngữ trong các môn học đã trở thành một nhu cầu thiết yếu nhằm tăng khả năng hội nhập của học sinh Việt Nam với bạn bè quốc tế. Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam và các tác giả xuất bản bộ sách *Các kì thi Toán quốc tế* nhằm đáp ứng nhu cầu này của học sinh và giáo viên bộ môn Toán.

Mục tiêu chính của bộ sách nhằm giới thiệu tới các em học sinh một số kì thi Toán quốc tế và khu vực có uy tín. Việc tiếp cận với các kì thi quy mô quốc tế, các dạng toán mới lạ và hấp dẫn ngoài chương trình phổ thông, sẽ có tác động tích cực đến việc thúc đẩy phong trào học tập nói chung. Bên cạnh đó, đây cũng sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích giúp các em học sinh chuẩn bị tốt hơn trong các kì thi học sinh giỏi mà các em có cơ hội tham dự.

Bộ sách được thực hiện dưới sự chủ biên của PGS. TS. Lê Anh Vinh cùng các tác giả có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng cũng như dẫn đoàn học sinh giỏi của Việt Nam tham dự các kì thi Toán quốc tế và khu vực. Trong đó, dự kiến bốn tập đầu của bộ sách như sau:

Tập 1. Giới thiệu các kì thi ITOT (International Mathematics Tournament of the Towns) và IMC (International Mathematics Competition).

Tập 2. Giới thiệu các kì thi IMSO (International Mathematics and Science Olympiad) và HMMT (Harvard-MIT Mathematics Tournament).

Tập 3. Giới thiệu kì thi AMC (American Mathematics Competitions) và AIME (The American Invitational Mathematics Examination).

Tập 4. Giới thiệu kì thi APMO (Asian Pacific Mathematics Olympiad).

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu bộ sách trên tới các thầy giáo, cô giáo, các bậc phụ huynh và các em học sinh trên cả nước. Hi vọng rằng bộ sách đáp ứng được phần nào nhu cầu học tập môn Toán bằng tiếng Anh cũng như nhu cầu giao lưu, học hỏi với bạn bè quốc tế thông qua các kì thi Toán quốc tế và khu vực của các em học sinh.

Mặc dù các tác giả và các biên tập viên đã rất cố gắng nhưng cuốn tập 1 được hoàn thành trong thời gian rất ngắn nên chắc chắn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về Ban Biên tập sách Toán-Tin, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHẦN THỨ NHẤT. Kì thi Toán quốc tế giữa các thành phố ITOT (International Mathematics Tournament of the Towns)

Kì thi Toán quốc tế giữa các thành phố (ITOT) được sáng lập bởi Nikolai Konstantinov, nhà toán học và cũng là nhà giáo dục nổi tiếng của Nga. Ông đã từng là thành viên Ban giám khảo kì thi Học sinh giỏi toán quốc tế IMO (International Mathematical Olympiad) nhưng ông không hài lòng với bản chất chọn lọc tinh hoa của IMO. Vì vậy ông thiết kế kì thi ITOT khác với tất cả những kì thi học sinh giỏi toán khác, trở thành kì thi mở và dân chủ nhất.

Như đã biết, đa số những thí sinh tham gia thi học sinh giỏi Toán phải thi qua từng vòng và chỉ những thí sinh vượt qua được vòng thi cấp thấp mới được tham gia các vòng thi sau có cấp độ cao hơn. Tại ITOT, bất cứ ai cũng có thể tham gia vào bất kì mức độ nào.

Hầu hết những câu hỏi của kì thi ITOT không đòi hỏi kiến thức đặc biệt chuyên sâu hay những kĩ năng tính toán thuần thục mà yêu cầu trí tưởng tượng và những ý tưởng mới mẻ. Đề thi, đặc biệt là mức độ A dành cho học sinh THPT, được so sánh tương đương về mức độ khó với đề thi học sinh giỏi toán quốc tế IMO nhưng chỉ đòi hỏi sự thông minh nhanh nhạy hơn là kĩ thuật. Những câu hỏi của kì thi đa phần là các bài toán tổ hợp, cùng với một số vấn đề về hình học, đại số và số học. Những bài toán có tính thử thách cao và mang màu sắc riêng so với những câu hỏi thường thấy trong các kì thi học sinh giỏi.

LỊCH SỬ KÌ THI

Kì thi ITOT được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1980 tại Nga. Mục đích chính của kì thi là tạo ra cơ hội cho nhiều học sinh có thể tham gia vào một kì thi chuẩn quốc tế. Điều này là không thể dưới sự chọn lọc kĩ càng qua nhiều vòng như đối với những kì thi học sinh giỏi hiện nay. Một mục đích khác là cung cấp cho giáo viên và những người tổ chức địa phương một nguồn tài liệu chất lượng cao.

Kì thi lần đầu tiên có tên gọi “Olympiad của ba thành phố”, đó là Moscow (thủ đô của Nga), Leningrad (hiện nay là Sankt-Peterburg) và Riga (thủ đô của Latvia). Danh tiếng của kì thi lớn dần qua từng năm, và những năm tiếp theo kì thi được mở rộng ở quy mô quốc tế và từ đó được gọi là *Kì thi Toán quốc tế giữa các thành phố*. Năm 1984, kì thi giành được nhiều sự chú ý trên toàn thế giới khi trở thành một Uỷ ban trực thuộc Viện Hàn lâm Khoa học Nga. Điều này thu hút sự tham gia của nhiều thành phố thuộc các nước Đông Âu. Năm 1988, Canberra (thủ đô của Australia) tham gia và trở thành thành phố đầu tiên bên ngoài châu Âu.

Số lượng thí sinh tham gia tiếp tục phát triển nhanh chóng. Khoảng hai chục nghìn học sinh đến từ 120 thành phố trên 25 nước đã tham gia vào kì thi lần thứ 21 (1999-2000), trong đó có 1500 thí sinh đạt được Bằng chứng nhận. Tổng dân số của các thành phố tham gia đã đạt đến 80 triệu người. Một số nước như Nga, Ukraina, Bungari, Serbia và những nước cộng hoà thuộc Nam Tư cũ là những thành viên tham gia tích cực nhất. Những thành viên ngoài Liên bang Xô Viết cũ và vùng Đông Âu gồm có Mĩ, Australia, Canada, Colombia, Argentina, Brazil, Đức, Pháp, Thụy Sĩ, Luxembourg, Israel, New Zeland, Đài Loan,…

Những thí sinh giỏi nhất từ nhiều quốc gia đã gặp nhau tại kì thi và tại Trại hè toán học. Trại hè toán học của kì thi không phải là những buổi hội thảo khoa học với hàng loạt tiết học khô khan, bài tập về nhà hay những chương trình chính thống. Trại hè toán học sẽ có những buổi gặp mặt thoải mái mà học sinh được mời đến tham gia cùng với những vị giáo sư hàng đầu. Điều này nhằm giúp cho những học sinh có năng khiếu có cơ hội tiếp cận với lời giải của những vấn đề đang được nghiên cứu. Đó là lí do tại sao nhà tổ chức đưa ra những câu hỏi rất khó mà không kém phần thú vị liên quan tới thực tế nghiên cứu toán học. Giải quyết những vấn đề như vậy cần sự nỗ lực suy nghĩ trong một thời gian dài. Do đó quá trình giải quyết vấn đề được quan tâm hơn, học sinh có nhiều ngày để suy nghĩ, có thể làm việc cá nhân hoặc làm việc nhóm. Thông thường, lời giải là kết quả từ sự cố gắng của một nhóm rất nhiều người. Tất cả những người tham gia Trại hè toán học đều có thể tận hưởng sự nghỉ ngơi đầy đủ, công việc sáng tạo chuyên sâu và những mối quan hệ thú vị. Kì thi ITOT đã thực sự trở thành cầu nối cho các nhà toán học trẻ từ khắp nơi trên thế giới.

Năm 2015, trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội là đơn vị đại diện tổ chức kì thi ITOT tại Việt Nam.

THỂ LỆ KÌ THI

Kì thi ITOT được tổ chức thường niên, mỗi năm hai vòng vào mùa thu (khoảng tháng mười) và mùa xuân (khoảng tháng ba).

Mỗi thành phố có thể tham gia một trong hai hoặc cả hai vòng thi. Điểm của một thành phố sẽ được tính dựa trên điểm trung bình của N thí sinh cao nhất từ hai vòng. Nếu dân số của thành phố lớn hơn 500 000, N là số dân của thành phố chia cho 100 000. Đối với những thành phố có số dân ít hơn, vẫn cần có 5 thí sinh, nhưng để cân bằng, điểm của họ sẽ được nhân với một hệ số trong khoảng 1 (dân số bằng 500 000) tới 1,625 (dân số bằng 0).

Trong mỗi vòng thi thường có hai mức độ, mức độ O (mở rộng) và mức độ A (nâng cao), cách nhau khoảng một tuần. Thí sinh có thể tham gia cả mức độ O và mức độ A trong mỗi vòng, và điểm của thí sinh được tính bằng số điểm cao hơn. Mức độ A khó hơn nhưng cũng được nhiều điểm hơn. Mỗi thí sinh có 4 giờ làm bài với mức độ O và 5 giờ làm bài với mức độ A để giải quyết ba câu hỏi.

Phần lớn học sinh không giỏi toàn diện trong mọi lĩnh vực của toán, nhưng trong các cuộc thi Học sinh giỏi toán khác, để đạt điểm cao phải giải quyết được toàn bộ các vấn đề được đưa ra. Tại Kì thi ITOT, thí sinh được lựa chọn giải quyết tối đa ba câu hỏi trong số năm đến tám câu hỏi được đưa ra, bởi vì chỉ có ba câu hỏi thí sinh làm tốt nhất được tính điểm.

Mặc dù Kì thi ITOT không chia theo khối lớp (chỉ chia theo cấp học), nhưng mỗi khối lớp đều có một hệ số điểm được nhân lên phù hợp.

Bên cạnh hệ thống giải thưởng của Ban tổ chức địa phương, những thí sinh với số điểm đủ cao, khoảng 13 điểm, sẽ được nhận Bằng chứng nhận từ Viện Hàn lâm Khoa học Nga. Những thí sinh có số điểm cao nhất còn được mời tham dự Trại hè Toán học được tổ chức tại Nga.

Kì thi Toán quốc tế giữa các thành phố lần đầu tiên tổ chức tại Việt Nam dự kiến vào tháng 10 năm 2015 sẽ được trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội trao giải theo từng cấp. Tổng số giải thưởng không vượt quá 50% số thí sinh tham gia dự thi, trong đó tỉ lệ giải Nhất, Nhì, Ba là 1:2:3.

A. ĐỀ THI TRUNG HỌC CƠ SỞ (Junior problems)

I. Tiếng Anh

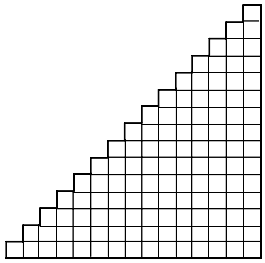
Junior O-Level, Spring 2015

1. [3] Is it possible to paint six faces of a cube into three colours so that each colour is present, but from any position one can see at most two colours?

2. [4] Points K and L are marked on side AB of triangle ABC so that $KL = BC$ and $AK = LB$. Given that O is the midpoint of side AC, prove that $\widehat{KOL} = 90^o$.

3. [4] Pete summed up 10 consecutive powers of two, while Basil summed up several first consecutive positive integers. Can they get the same result?

4. [4] A figure, given on the grid, consists of a 15-step staircase and horizontal and vertical bases (see the figure). What is the least number of squares one can split this figure into? (Splitting is allowed only along the grid).



5. [5] Among $2n + 1$ positive integers there is exactly one 0, while each of the numbers 1, 2, ..., n is presented exactly twice. For which n can one line up these numbers so that for any m = 1, 2, ..., n there are exactly m numbers between two m's?

Junior A-Level, Spring 2015

1. [4] A point is chosen inside a parallelogram $ABCD$ so that $CD = CE$. Prove that the segment DE is perpendicular to the segment connecting the midpoints of the segments AE and BC.

2. [6] Area 51 has the shape of a non-convex polygon. It is protected by a chain fence along its perimeter and is surrounded by a minefield so that a spy can only move along the fence. The spy went around the Area once so that the Area was always on his right. A straight power line with 36 poles crosses this area so that some of the poles are inside the Area, and some are outside it. Each time the spy crossed the power line, he counted the poles to the left of him (he could see all the poles). Having passed along the whole fence, the spy had counted 2015 poles in total. Find the number of poles inside the fence.

3. **(a) [3]** The integers x, x^2 and x^3 begin with the same digit. Does it imply that this digit is 1?

(b) [4] The same question for the integers $x,\ x^2, x^3, \dots,\ x^{2015}$.

4. For each side of some polygon, the line containing it contains at least one more vertex of this polygon. Is it possible that the number of vertices of this polygon is

(a) [4] ≤ 9? **(b) [5]** ≤ 8?

5. **(a) [4]** A $2 \times n$-table (with $n > 2$) is filled with numbers so that the sums in all the columns are different. Prove that it is possible to permute the numbers in the table so that the sums in the columns would still be different and the sums in the rows would also be different.

(b) [5] A 10×10-table is filled with numbers such that the sums in all the columns are different. Is it always possible to permute the numbers in the table so that the sums in the columns would still be different and the sums in the rows would also be different?

6. [9] A convex N-gon with equal sides is located inside a circle. Each side is extended in both directions up to the intersection with the circle so that it contains two new segments outside the polygon. Prove that one can paint some of these new $2N$ segments in red and the rest in blue so that the sum of lengths of all the red segments would be the same as for the blue ones.

7. [10] An Emperor invited 2015 wizards to a festival. Each of the wizards knows who of them is good and who is evil, however the Emperor doesn't know this. A good wizard always tells the truth, while an evil wizard can tell the truth or lie at any moment. The Emperor asks each wizard (in an order of his choice) a single question, maybe different for different wizards, and listens to the answer which is either "yes" or "no". Having listened to all the answers, the Emperor expels a single wizard through a magic door which shows if this wizard is good or evil. Then the Emperor repeats the procedure with the remaining wizards, and so on. The Emperor may stop at any moment, and after this the Emperor may expel or not expel a wizard. Prove that the Emperor can expel all the evil wizards having expelled at most one good wizard.

Junior O-Level, Spring 2014

1. [3] Each of given 100 numbers was increased by 1. Then each number was increased by 1 once more. Given that the first time the sum of the squares of the numbers was not changed, find how this sum was changed the second time.

2. [4] Mother baked 15 pasties. She placed them on a round plate in a circular way: 7 with cabbage, 7 with meat and one with cherries in that exact order and put the plate into a microwave. All pasties look the same but Olga knows the order. However she doesn't know how the plate has been rotated in the microwave. She wants to eat a pasty with cherries. Can Olga eat her favourite pasty for sure if she is not allowed to try more than three other pasties?

3. [4] The entries of a 7×5 table are filled with numbers so that in each 2×3 rectangle (vertical or horizontal) the sum of numbers is 0. For 100 dollars Peter may choose any single entry and learn the number in it. What is the least amount of dollars he should spend in order to learn the total sum of numbers in the table for sure?

4. [5] Point L is marked on side BC of triangle ABC so that AL is twice as long as the median CM. Given that angle $\angle ALC$ is equal to 45°, prove that AL is perpendicular to CM.

5. [6] Ali Baba and the 40 thieves want to cross Bosporus strait. They made a line so that any two people standing next to each other are friends. Ali Baba is the first, he is also a friend with the thief next to his neighbour. There is a single boat that can carry 2 or 3 people and these people must be friends. Can Ali Baba and the 40 thieves always cross the strait if a single person cannot sail?

Junior A-Level, Spring 2014

1. [3] During Christmas party Santa handed out to the children 47 chocolates and 74 marmalades. Each girl got 1 more chocolate than each boy but each boy got 1 more marmalade than each girl. What was the number of the children?

2. [5] Peter marks several cells on a 5×5 board. Basil wins if he can cover all marked cells with three-cell corners. The corners must be inside the board and not overlap. What is the least number of cells Peter should mark to prevent Basil from winning? (Cells of the corners must coincide with the cells of the board).

3. [6] A square table is covered with a square cloth (may be of a different size) without folds and wrinkles. All corners of the table are left uncovered and all four hanging parts are triangular. Given that two adjacent hanging parts are equal, prove that two other parts are also equal.

4. [7] The King called two wizards. He ordered First Wizard to write down 100 positive integers (not necessarily distinct) on cards without revealing them to Second Wizard. Second Wizard must correctly determine all these integers, otherwise both wizards will lose their heads. First Wizard is allowed to provide Second Wizard with a list of distinct integers, each of which is either one of the integers on the cards or a sum of some of these integers. He is not allowed to tell which integers are on the cards and which integers are their sums. If Second Wizard correctly determines all 100 integers the King tears as many hairs from each wizard's beard as the number of integers in the list given to Second Wizard. What is the minimal number of hairs each wizard should sacrifice to stay alive?

5. [7] There are several white and black points. Every white point is connected with every black point by a segment. Each segment is equipped with a positive integer. For any closed circuit the product of the integers on the segments passed in the direction from white to black point is equal to the product of the integers on the segments passed in the opposite direction. Can one always place the integer at each point so that the integer on each segment is the product of the integers at its ends?

6. [9] A 3×3×3 cube is made of 1×1×1 cubes glued together. What is the maximal number of small cubes one can remove so the remaining solid has the following features:

1) Projection of this solid on each face of the original cube is a 3×3 square;

2) The resulting solid remains face-connected (from each small cube one can reach any other small cube along a chain of consecutive cubes with common faces).

7. [9] Points $A_1, A_2, ..., A_{10}$ are marked on a circle clockwise. It is known that these points can be divided into pairs of points symmetric with respect to the centre of the circle. Initially at each marked point there was a grasshopper. Every minute one of the grasshoppers jumps over its neighbour along the circle so that the resulting distance between them doesn't change. It is not allowed to jump over any other grasshopper and to land at a point already occupied. It occurred that at some moment nine grasshoppers were found at points $A_1, A_2, ..., A_9$ and the tenth grasshopper was on arc $A_9A_{10}A_1$. Is it necessarily true that this grasshopper was exactly at point A_{10}?

Junior O-Level, Fall 2014

1. [3] There are 99 sticks of lengths $1, 2, 3, ..., 99$. Is it possible to use all of them to form the perimeter of a rectangle?

2. Do there exist ten pairwise distinct positive integers such that their average divided by their greatest common divisor is equal to

(a) [2] 6?

(b) [2] 5?

3. [5] *K* and *L* are points on the sides *AB* and *BC* of a square *ABCD* respectively, such that *KB* = *LC*. *P* be the point of intersection of *AL* and *CK*. Prove that *DP* and *KL* are perpendicular.

4. [5] In the 40 tests Andrew had taken, he got 10 As, 10 Bs, 10 Cs and 10 Ds. A score is said to be *unexpected* if this particular score has appeared up to now fewer times than any of the other three scores. Without knowing the order of these 40 scores, is it possible to determine the number of unexpected ones?

5. There are $n > 1$ right triangles. In each triangle, Adam chooses a leg and calculates the sum of their lengths. Then he calculates the sum of the lengths of the remaining legs. Finally, he calculates the sum of the lengths of the hypotenuses. If these three numbers are the side lengths of a right triangle, prove that the n triangles are similar to one another for

(a) [2] $n = 2$?

(b) [3] an arbitrary positive integer n?

Junior A-Level, Fall 2014

1. [4] Half of all entries in a square table are plus signs, and the remaining half are minus signs. Prove that either two rows or two columns contain the same number of plus signs.

2. [5] Prove that any polygon with an incircle has three sides that can form a triangle.

3. [6] Is it possible to divide all positive divisors of 100!, including 1 and 100!, into two groups of equal size such that the product of the numbers in each group is the same?

4. [7] On a circular road there are 25 equally spaced booths, each with a patrolman numbered from 1 to 25 in some order. The patrolmen switch booths by moving along the road, so that their numbers are from 1 to 25 in clockwise order. If the total distance travelled by the patrolmen is as low as possible, prove that one of them remains in the same booth.

5. [8] In triangle ABC, $\angle A = 90°$. Two equal circles tangent to each other are such that one is tangent to BC at M and to AB, and the other is tangent to BC at N and to CA. Prove that the midpoint of MN lies on the bisector of $\angle A$.

6. [8] A *uniform* number is a positive integer in which all digits are the same. Prove that any n-digit positive integer can be expressed as the sum of at most $n + 1$ uniform numbers.

Example: The numbers 4, 111 and 999999 are uniform.

7. A spiderweb is a square grid with 100×100 nodes, at 100 of which flies are stuck. Starting from a corner node of the web, a spider crawls from a node to an adjacent node in each move. A fly stuck at the node where the spider is will be eaten. Can the spider always eat all the flies in no more than

(a) [5] 2100 moves? **(b) [5]** 2000 moves?

Junior O-Level, Spring 2013

1. [3] There are six points on the plane such that one can split them into two triples each creating a triangle. Is it always possible to split these points into two triples creating two triangles with no common point (neither inside, nor on the boundary)?

2. [4] There is a positive integer A. Two operations are allowed: increasing this number by 9 and deleting a digit equal to 1 from any position. Is it always possible to obtain $A + 1$ by applying these operations several times?

Remark. If leading digit 1 is deleted, all leading zeros are deleted as well.

3. [4] Each of 11 weights is weighing an integer number of grams. No two weights are equal. It is known that if all these weights or any group of them are placed on a balance then the side with a larger number of weights is always heavier. Prove that at least one weight is heavier than 35 grams.

4. [5] Eight rooks are placed on a 8×8 chessboard, so that no two rooks attack one another. All squares of the board are divided between the rooks as follows. A square where a rook is placed belongs to it. If a square is attacked by two rooks then it belongs to the nearest rook, in case these two rooks are equidistant from this square each of them possesses a half of the square. Prove that every rook possesses the equal area.

5. [5] In a quadrilateral *ABCD*, angle *B* is equal to $150°$, angle *C* is right, and sides *AB* and *CD* are equal. Determine the angle between *BC* and the line connecting the midpoints of sides *BC* and *AD*.

Junior A-Level, Spring 2013

1. [4] Several positive integers are written on a blackboard. The sum of any two of them is some power of two (for example, $2, 4, 8, \ldots$). What is the maximal possible number of different integers on the blackboard?

2. [4] Twenty children, ten boys and ten girls, are standing in a line. Each boy counted the number of children standing to the right of him. Each girl counted the number of children standing to the left of her. Prove that the sums of numbers counted by the boys and the girls are the same.

3. [5] There is a 19×19 board. Is it possible to mark some 1×1 squares so that each of 10×10 squares contain different number of marked squares?

4. [5] On a circle, there are 1000 nonzero real numbers painted black and white in turn. Each black number is equal to the sum of two white numbers adjacent to it, and each white number is equal to the product of two black numbers adjacent to it. What are the possible values of the total sum of 1000 numbers?

5. [6] A point in the plane is called a node if both its coordinates are integers. Consider a triangle with vertices at nodes containing exactly two nodes inside. Prove that the straight line connecting these nodes either passes through a vertex or is parallel to a side of the triangle.

6. [8] Let *ABC* be a right-angled triangle, *I* its incenter and B_0, A_0 points of tangency of the incircle with the legs *AC* and *BC* respectively. Let the perpendicular dropped to *AI* from A_0 and the perpendicular dropped to *BI* from B_0 meet at point *P*. Prove that the lines *CP* and *AB* are perpendicular.

7. [9] Two teams *A* and *B* play a school ping pong tournament. The team *A* consists of *m* students, and the team *B* consists of *n* students where $m \neq n$. There is only one ping pong table to play and the tournament is organized as follows. Two students from different teams start to play while other players form a line waiting for their turn to play. After each game the first player in the line replaces the member of the same team at the table and plays with the remaining player. The replaced player then goes to the end of the line. Prove that every two players from the opposite teams will eventually play against each other.

Junior O-Level, Fall 2013

1. [3] In a wrestling tournament, there are 100 participants, all of different strengths. The stronger wrestler always wins over the weaker opponent. Each wrestler fights twice and those who win both of their fights are given awards. What is the least possible number of awardees?

2. [4] Does there exist a ten-digit number such that all its digits are different and after removing any six digits we get a composite four-digit number?

3. [4] Denote by (a, b) the greatest common divisor of a and b. Let n be a positive integer such that $(n,n+1)<(n,n+2)<\cdots<(n,n+35)$.

Prove that $(n,n+35)<(n,n+36)$.

4. [5] Let ABC be an isosceles triangle. Suppose that points K and L are chosen on lateral sides AB and AC respectively so that $AK = CL$ and $\angle ALK+\angle LKB=60°$. Prove that $KL = BC$.

5. [6] Eight rooks are placed on a chessboard so that no two rooks attack each other. Prove that one can always move all rooks, each by a move of a knight so that in the final position no two rooks attack each other as well. (In intermediate positions several rooks can share the same square).

Junior A-Level, Fall 2013

1. [5] There are 100 red, 100 yellow and 100 green sticks. One can construct a triangle using any three sticks all of different colours (one red, one yellow and one green). Prove that there is a colour such that one can construct a triangle using any three sticks of this colour.

2. [5] A math teacher chose 10 consequent positive integers and submitted them to Pete and Basil. Each boy should split these numbers in pairs and calculate the sum of products of numbers in pairs. Prove that the boys can pair the numbers differently so that the resulting sums are equal.

3. [6] Assume that C is a right angle of triangle ABC and N is a midpoint of the semicircle, constructed on CB as on diameter externally. Prove that AN divides the bisector of angle C in halves.

4. [7] Pete drew a square in the plane, divided it into 64 equal square cells and painted it in a chess board fashion. He chose some cell and an interior point in it. Basil can draw any polygon (without self-intersections) in the plane and ask Pete whether the chosen point is inside or outside this polygon. What is the minimal number of questions sufficient to determine whether the chosen point is black or white?

5. [9] A 101-gon is inscribed in a circle. From each vertex of this polygon a perpendicular is dropped to the opposite side or its extension. Prove that at least one perpendicular drops to the side.

6. [10] The number $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ is represented as an irreducible fraction. If $3n + 1$ is a prime number, prove that the numerator of this fraction is a multiple of $3n + 1$.

7. [12] On a table, there are 11 piles of ten stones each. Pete and Basil play the following game. In turns they take 1, 2 or 3 stones at a time: Pete takes stones from any single pile while Basil takes stones from different piles but no more than one from each. Pete moves first. The player who cannot move, loses. Which of the players, Pete or Basil, can guarantee a victory regardless of the opponent's play?

Junior O-Level, Spring 2012

1. A treasure is buried under a square of an 8×8 board. Under each other square is a message which indicates the minimum number of steps needed to reach the square with the treasure. Each step takes one from a square to another square sharing a common side. What is the minimum number of squares we must dig up in order to bring up the treasure for sure?

2. The number 4 has an odd number of odd positive divisors, namely 1, and an even number of even positive divisors, namely 2 and 4. Is there a number with an odd number of even positive divisors and an even number of odd positive divisors?

3. In the parallelogram *ABCD*, the diagonal *AC* touches the incircles of triangles *ABC* an *ADC* at *W* and *Y* respectively, and the diagonal *BD* touches the incircles of triangles *BAD* and *BCD* at *X* and *Z* respectively. Prove that either *W*, *X*, *Y* and *Z* coincide, or *WXYZ* is a rectangle.

4. Brackests are to be inserted into the expression
$10\div9\div8\div7\div6\div5\div4\div3\div2$ so that the resulting number is an integer.

(a) Determine the maximum value of this integer.

(b) Determine the minimum value of this integer.

5. RyNo, a little rhinoceros, has 17 scratch marks on its body. Some are horizontal and the rest are vertical. Some are on the left side and the rest are on the right side. If RyNo rubs one side of its body against a tree, two scratch marks, either both horizontal or both vertical, will disappear from that side. However, at the same time, two new scratch marks, one horizontal and one vertical, will appear on the other side. If there are less than two horizontal and less than two vertical scratch marks on the side being rubbed, then nothing happens. If RyNo continues to rub its body against trees, is it possible that at some point in time, the numbers of horizontal and vertical scratch marks have interchanged on each side of its body?

Note. The problems are worth 3, 4, 4, 2+3 and 5 points respectively.

Junior A-Level, Spring 2012

1. It is possible to place an even number of pears in a row such that the masses of any two neighbouring pears differ by at most 1 gram. Prove that it is then possible to put the pears two in a bag and place the bags in a row such that the masses of any two neighbouring bags differ by at most 1 gram.

2. One hundred points are marked in the plane, with no three in a line. Is it possible to connect the points in pairs such that all fifty segments intersect one another?

3. In a team of guards, each is assigned a different positive number. For any two guards, the ratio of the two number assigned to them is at least 3:1. A guard assigned the number n is on duty for n days in a row, off duty for n days in a row, back on dudy for n days in a row, and so on. The guards need not start their duties on the same day. Is it possible that on any day, at least one in such a team of guards is on duty?

4. Each entry in an $n \times n$ table is either $+$ or $-$. At each step, one can choose a row or a column and reverse all signs in it. From the initial position, it is possible to obtain the table in which all sign are $+$. Prove that this can be accomplished in at most n steps.

5. Let p be a prime number. A set of $p + 2$ positive integers, not necessarily distinct, is called *interesting* if the sum of any p of them is divisible by each of the other two. Dertermine all interesting sets.

6. A bank has one million clients, and one of whom is Inspector Gadget. Each client has a unique PIN number consisting of six digits. Dr. Claw has a list of all the clients. He is able to break into the account of any client, choose any n digits of the PIN number and copy them. The n digits he copies from different clients need not be in the same n positions. He can break into the account of each client, but only once. What is the smallest value of n which allow Dr. Claw to determine the complete PIN number of Inspector Gadget?

7. Let AH be altitude of an equilateral triangle ABC. Let I be the incentre of triangle ABH, and let L, K and J be the incentres of triangles ABI, BCI and CAI respectively. Determine $\angle KJL$.

Note. The problems are worth 4, 4, 6, 6, 8, 8 and 8 points respectively.

Junior O-Level, Fall 2012

1. Five students have the first names Clark, Donald, Jack, Robin and Steve, and have the last names (in a different order) Clarkson, Donaldson, Jackson, Robinson and Stevenson. It is known that Clark is 1 year older than Clarkson, Donald is 2 years older than Donaldson, Jack is 3 years older than Jackson and Robin is 4 years older than Robinson.

Who is older, Steve or Stevenson and what is the difference in their ages?

2. Let $C(n)$ be the number of prime divisors of a positive integer n. (For example, $C(10)=2$, $C(11)=1$, $C(12)=2$). Consider set S of all pairs of positive integers (a,b) such that $a \neq b$ and $C(a+b)=C(a)+C(b)$.
Is set S finite or infinite?

3. A table 10×10 was filled according to the rules of the game "Bomb Squad": several cells contain bombs (one bomb per cell) while each of the remaining cells contains a number, equal to the number of bombs in all cells adjacent to it by side or by vertex. Then the table is rearranged in the "reverse" order: bombs are place in all cells previously occupied with numbers and the remaining cells are filled with numbers according to the same rule. Can it happen that the total sum of the numbers in the table will increase in a result?

4. A circle touches sides *AB*, *BC*, *CD* of a parallelogram *ABCD* at points *K*, *L*, *M* respectively. Prove that the line *KL* bisects the height of the parallelogram drawn from the vertex *C* to *AB*.

5. For a class of 20 students several field trips were arranged. In each trip at least one student participated. Prove that there was a field trip such that each student who participated in it took part in at least 1/20-th of all field trips.

Junior A-Level, Fall 2012

1. The decimal representation of an integer uses only two different digits. The number is at least 10 digits long, and any two neighbouring digits are distinct. What is the greatest power of two that can divide this number?

2. Chip and Dale play the following game. Chip starts by splitting 222 nuts between two piles, so Dale can see it. In response, Dale chooses some number *N* from 1 to 222. Then Chip moves nuts from the piles he prepared to a new (third) pile until there will be exactly *N* nuts in any one or two piles. When Chip accomplishes his task, Dale gets an exact amount of nuts that Chip moved. What is the maximal number of nuts that Dale can get for sure, no matter how Chip acts? (Naturally, Dale wants to get as many nuts as possible, while Chip wants to lose as little as possible).

3. Some cells of a 11×11 table are filled with pluses. It is known that the total number of pluses in the given table and in any of its 2×2 sub-tables is even. Prove that the total number of pluses on the main diagonal of the given table is also even. (2×2 sub-tables consists of four adjacent cells, four cells around a common vertex).

4. Given a triangle *ABC*. Suppose *I* is its incentre, and *X*, *Y*, *Z* are incentres of triangles *AIB*, *BIC* and *AIC* respectively. The incentre of triangle *XYZ* coincides with *I*. Is it necessarily true that triangle *ABC* is regular?

5. A car rides along a circular track in the clockwise direction. At noon, Peter and Paul took their positions at two different points of the track. Some moment later they simultaneously ended their duties and compared their notes. The car passed each of them at least 30 times. Peter noticed that each circle was passed by the car 1 second faster than the preceding one while Paul's observation was opposite: each circle was passed 1 second slower than the preceding one. Prove that their duty was at least an hour and a half long.

6. **(a)** A point A is marked inside a circle. Two perpendicular lines drawn through A intersect the circle at four points. Prove that the centre of mass of these four points does not depend on the choice of the lines.

(b) A regular $2n$-gon $(n \geq 2)$ with centre A is drawn inside a circle (A does not necessarily coincide with the centre of the circle). The rays going from A to the vertices of the $2n$-gon mark $2n$ points on the circle. Then the $2n$-gon is rotated about A. The rays going from A to the new locations of vertices mark new $2n$ points on the circle. Let O and N be the centres of gravity of old and new points respectively. Prove that $O = N$.

7. Peter and Paul play the following game. First, Peter chooses some positive integer a with the sum of its digits equal to 2012. Paul wants to determine this number; he knows only that the sum of the digits of Peter's number is 2012. On each of his moves, Paul chooses a positive integer x and Peter tells him the sum of the digits of $|x-a|$. What is the minimal number of moves in which Paul can determine Peter's number for sure?

II. Tiếng Việt

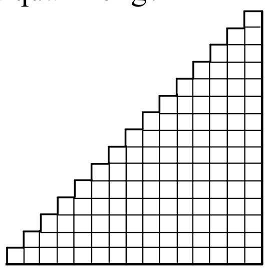
Mùa xuân 2015. THCS. Mở rộng

1. Hỏi có thể tô màu 6 mặt của một hình lập phương bởi 3 màu sao cho mỗi màu đều được tô và từ bất cứ góc nhìn nào ta chỉ thấy được nhiều nhất là hai màu được không?

2. Trên cạnh AB của tam giác ABC lấy hai điểm K và L sao cho $KL = BC$ và $AK = LB$. Gọi O là trung điểm cạnh AC. Chứng minh rằng $\widehat{KOL} = 90^o$.

3. Peter tính tổng của 10 luỹ thừa liên tiếp của 2, bắt đầu từ một luỹ thừa nào đó, trong khi đó Basil tính tổng của một số số nguyên dương liên tiếp kể từ số 1. Hỏi rằng cả hai bạn có thể nhận được cùng một kết quả không?

4. Trên lưới ô vuông cho một hình tạo bởi 15 bậc thang và các đường biên ngang, dọc (xem hình vẽ). Hỏi có thể chia hình đã cho thành ít nhất bao nhiêu hình vuông? (chỉ thực hiện phép chia hình trên lưới ô vuông).



5. Cho $2n+1$ số nguyên, trong đó có đúng một số 0, các số 1, 2, ..., n mỗi số xuất hiện hai lần. Hãy cho biết với các số tự nhiên n nào thì ta có thể sắp xếp $2n+1$ số nguyên trên thành một dãy sao cho với mọi $m = 1, 2, \ldots, n$ thì có đúng m số giữa hai số m?