

LÊ ANH VINH - TRỊNH HOÀI DƯƠNG - LÊ THỊ THU HƯỜNG - PHẠM THỊ HƯỜNG
(Sưu tầm và biên soạn)

CÁC KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ

TẬP 3

SONG NGỮ ANH - VIỆT

Dành cho học sinh Trung học cơ sở
và Trung học phổ thông

**American Mathematics
Competitions (AMC)**

**American Invitational
Mathematics Examination (AIME)**



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LÊ ANH VINH
TRỊNH HOÀI DƯƠNG - LÊ THỊ THU HƯỜNG - PHẠM THỊ HƯỜNG
(Sưu tầm và biên soạn)

CÁC KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ



TẬP 3

SONG NGỮ ANH - VIỆT

Dành cho học sinh Trung học cơ sở
và Trung học phổ thông

American Mathematics
Competitions (AMC)

American Invitational Mathematics
Examination (AIME)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Một số lưu ý khi sử dụng

- Đề tiếng Việt sử dụng chung hình với đề tiếng Anh.
- Lời giải tiếng Việt sử dụng chung hình với lời giải tiếng Anh nếu hình vẽ giống hệt nhau.
- Một số kí hiệu vẫn giữ nguyên bản trong tiếng Anh nhưng được thay đổi cho phù hợp theo tiếng Việt (ví dụ như $\overline{AB}$ là đoạn thẳng trong tiếng Anh nhưng trong tiếng Việt là $AB, \dots$).
- Đối với những bài toán trong AMC 12 nếu giống AMC 10 thì xem lời giải AMC 10 trong cùng năm học đó.

Tài liệu tham khảo

Các đề thi được sưu tầm từ Ban tổ chức các kì thi AMC, AIME và website <http://www.artofproblemsolving.com>.

MỤC LỤC

Lời giới thiệu	4
----------------------	---

PHẦN THỨ NHẤT. Kỳ thi Học sinh giỏi Toán học Hoa Kỳ AMC (American Mathematics Competitions)	5
--	----------

<i>A. Năm học 2014-2015</i>	6
AMC 8	6
AMC 10 - Test A	23
AMC 10 - Test B	45
AMC 12 - Test A	67
AMC 12 - Test B	85

<i>B. Năm học 2013-2014</i>	104
AMC 8	104
AMC 10 - Test A	122
AMC 10 - Test B	145
AMC 12 - Test A	168
AMC 12 - Test B	184

PHẦN THỨ HAI. Kỳ thi Học sinh giỏi Toán học Hoa Kỳ AIME (American Invitational Mathematics Examination)	205
--	------------

<i>A. Năm học 2014-2015</i>	206
AIME - Test I	206
AIME - Test II	225

<i>B. Năm học 2013-2014</i>	242
AIME - Test I	242
AIME - Test II	263

ANSWER KEY - ĐÁP SỐ	281
---------------------------	-----

LỜI GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây, việc dạy và học bằng tiếng Anh ngày càng nhận được sự quan tâm của các gia đình và nhà trường. Sử dụng các tài liệu tham khảo bằng tiếng Anh hoặc song ngữ trong các môn học đã trở thành một nhu cầu thiết yếu nhằm tăng khả năng hội nhập của học sinh Việt Nam với bạn bè quốc tế. Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam và các tác giả xuất bản bộ sách *Các kì thi Toán quốc tế* nhằm đáp ứng nhu cầu này của học sinh và giáo viên bộ môn Toán.

Mục tiêu chính của bộ sách nhằm giới thiệu một số kì thi Toán quốc tế và khu vực có uy tín. Việc tiếp cận với các kì thi quy mô quốc tế, các dạng toán mới lạ và hấp dẫn ngoài chương trình phổ thông sẽ có tác động tích cực đến việc thúc đẩy phong trào học tập nói chung. Bên cạnh đó, đây cũng sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích giúp các em học sinh chuẩn bị tốt hơn trong các kì thi học sinh giỏi mà các em có cơ hội tham dự.

Bộ sách được thực hiện dưới sự chủ biên của PGS. TS. Lê Anh Vinh cùng các tác giả có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng cũng như dẫn đoàn học sinh giỏi của Việt Nam tham dự các kì thi Toán quốc tế và khu vực. Trong đó, dự kiến bốn tập đầu của bộ sách như sau:

Tập 1. Giới thiệu các kì thi ITOT (International Mathematics Tournament of the Towns) và IMC (International Mathematics Competition).

Tập 2. Giới thiệu các kì thi IMSO (International Mathematics and Science Olympiad) và HMMT (Harvard-MIT Mathematics Tournament).

Tập 3. Giới thiệu kì thi AMC (American Mathematics Competitions) và AIME (The American Invitational Mathematics Examination).

Tập 4. Giới thiệu kì thi APMO (Asian Pacific Mathematics Olympiad).

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu bộ sách trên tới các thầy giáo, cô giáo, các bậc phụ huynh và các em học sinh trên cả nước. Hi vọng rằng bộ sách đáp ứng được phần nào nhu cầu học tập môn Toán bằng tiếng Anh cũng như nhu cầu giao lưu, học hỏi với bạn bè quốc tế thông qua các kì thi Toán quốc tế và khu vực của các em học sinh.

Mặc dù các tác giả và các biên tập viên đã rất cố gắng nhưng cuốn sách được hoàn thành trong thời gian rất ngắn nên chắc chắn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về Ban Biên tập sách Toán-Tin, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



PHẦN THỨ NHẤT. Kì thi Học sinh giỏi Toán học Hoa Kỳ AMC (American Mathematics Competitions)

Kì thi Học sinh giỏi Toán học Hoa Kỳ - AMC (American Mathematics Competitions) là kì thi có lịch sử lâu đời được tổ chức bởi Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ (Mathematical Association of America) từ năm 1950. Mục tiêu quan trọng nhất của kì thi AMC là tạo cơ hội cho các thí sinh được làm quen với những dạng toán có chiều sâu trong chương trình giáo dục phổ thông, với nhiều câu hỏi liên quan tới các ứng dụng toán học trong thực tế. Đề thi luôn hướng tới việc thúc đẩy khả năng tư duy và kĩ năng giải quyết vấn đề của học sinh. Từ cách tiếp cận đó, kì thi hướng tới việc thúc đẩy sự hứng thú, niềm đam mê và thái độ học tập tích cực của thí sinh không chỉ trong phạm vi môn Toán.

Kì thi AMC được chia theo các khối lớp 8, 10 và 12. Hàng năm có khoảng 350 000 thí sinh đến từ 6 000 trường trên toàn thế giới tham dự.

Kì thi AMC 8 bắt đầu vào năm 1985 dành cho khối 6, 7 và 8 được tổ chức vào tháng Mười một hàng năm. Đề thi gồm 25 câu hỏi trắc nghiệm với thời gian làm bài là 40 phút. Kì thi AMC 10 bắt đầu từ năm 2000 dành cho học sinh khối 9, 10 và những học sinh có thành tích cao trong kì thi AMC 8. Kì thi AMC 12 bắt đầu từ năm 1950 dành cho học sinh khối 11 và 12. Hai kì thi AMC 10 và AMC 12 gồm hai ngày thi A và B cách nhau hai tuần, được tổ chức vào tháng hai hàng năm. Mỗi bài thi gồm 25 câu hỏi trắc nghiệm với thời gian làm bài 75 phút.

Bắt đầu từ năm học 2015-2016, Trung tâm Nghiên cứu và Ứng dụng Khoa học Giáo dục, Trường Đại học Giáo dục là đơn vị đại diện chính thức của Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ để tổ chức các kì thi AMC tại Việt Nam. Ban tổ chức hi vọng việc tiếp cận các kì thi quy mô quốc tế, sẽ giúp tăng cường tính cạnh tranh, khả năng hội nhập của học sinh Việt Nam với bạn bè quốc tế.

Tất cả các thí sinh tham gia các cuộc thi AMC sẽ được xét giải theo hệ thống giải thưởng của Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ:

- Giấy chứng nhận loại Xuất sắc dành cho thí sinh đạt điểm tối đa.
- Huy hiệu Vô địch AMC 8 dành cho các học sinh có điểm cao nhất mỗi trường.
- Các học sinh đứng thứ nhất, nhì và ba của mỗi trường sẽ lần lượt được nhận Giấy chứng nhận Thành tích xuất sắc Vàng, Bạc và Đồng.
- Giấy khen AMC 8 dành cho mỗi học sinh đạt kết quả cao.
- Những thí sinh đạt kết quả cao nhất trong kì thi AMC 8 sẽ được mời tham dự kì thi AMC 10 được tổ chức vào tháng 2/2016.

Ngoài ra, những thí sinh Việt Nam đạt được mức độ điểm tiêu chuẩn sẽ được cấp Bằng khen của Trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội.

A. NĂM HỌC 2014 - 2015

AMC 8

PROBLEMS

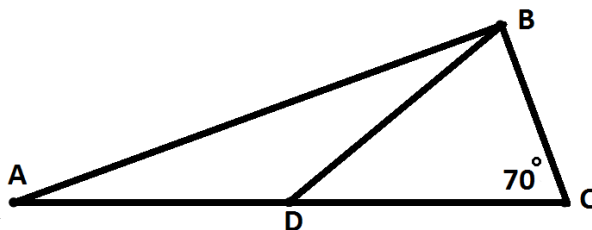
1. Harry and Terry are each told to calculate $8 - (2 + 5)$. Harry gets the correct answer. Terry ignores the parentheses and calculates $8 - 2 + 5$. If Harry's answer is H and Terry's answer is T , what is $H - T$?
(A) -10 (B) -6 (C) 0 (D) 6 (E) 10
2. Paul owes Paula 35 cents and has a pocket full of 5-cent coins, 10-cent coins, and 25-cent coins that he can use to pay her. What is the difference between the largest and the smallest number of coins he can use to pay her?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
3. Isabella had a week to read a book for a school assignment. She read an average of 36 pages per day for the first three days and an average of 44 pages per day for the next three days. She then finished the book by reading 10 pages on the last day. How many pages were in the book?
(A) 240 (B) 250 (C) 260 (D) 270 (E) 280 .
4. The sum of two prime numbers is 85. What is the product of these two prime numbers?
(A) 85 (B) 91 (C) 115 (D) 133 (E) 166
5. Margie's car can go 32 miles on a gallon of gas, and gas currently costs \$4 per gallon. How many miles can Margie drive on \$20 worth of gas?
(A) 64 (B) 128 (C) 160 (D) 320 (E) 640
6. Six rectangles each with a common base width of 2 have lengths of 1, 4, 9, 16, 25, and 36. What is the sum of the areas of the six rectangles?
(A) 91 (B) 93 (C) 162 (D) 182 (E) 202
7. There are four more girls than boys in Ms. Raub's class of 28 students. What is the ratio of number of girls to the number of boys in her class?
(A) $3 : 4$ (B) $4 : 3$ (C) $3 : 2$ (D) $7 : 4$ (E) $2 : 1$
8. Eleven members of the Middle School Math Club each paid the same amount for a guest speaker to talk about problem solving at their math

club meeting. They paid their guest speaker $\$1\overline{A}2$. What is the missing digit A of this 3-digit number?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

9. In $\triangle ABC$, D is a point on side AC such that $BD = DC$ and $\angle BCD$ measures 70° . What is the degree measure of $\angle ADB$?

- (A) 100 (B) 120 (C) 135 (D) 140 (E) 150



10. The first AMC 8 was given in 1985 and it has been given annually since that time. Samantha turned 12 years old the year that she took the seventh AMC 8. In what year was Samantha born?

- (A) 1979 (B) 1980 (C) 1981 (D) 1982 (E) 1983

11. Jack wants to bike from his house to Jill's house, which is located three blocks east and two blocks north of Jack's house. After biking each block, Jack can continue either east or north, but he needs to avoid a dangerous intersection one block east and one block north of his house. In how many ways can he reach Jill's house by biking a total of five blocks?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 10

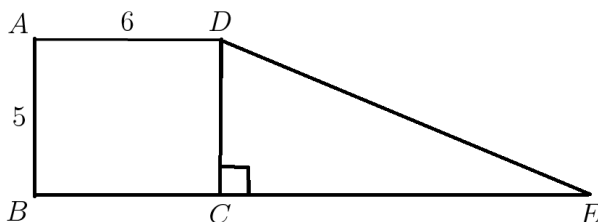
12. A magazine printed photos of three celebrities along with three photos of the celebrities as babies. The baby pictures did not identify the celebrities. Readers were asked to match each celebrity with the correct baby pictures. What is the probability that a reader guessing at random will match all three correctly?

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

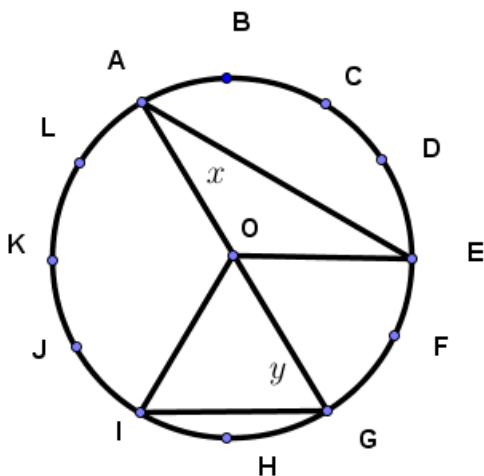
13. If n and m are integers and $n^2 + m^2$ is even, which of the following is impossible?

- (A) n and m are even (B) n and m are odd (C) $n + m$ is even
(D) $n + m$ is odd (E) none of these are impossible

14. Rectangle $ABCD$ and right triangle DCE have the same area. They are joined to form a trapezoid, as shown. What is DE ?
- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16



15. The circumference of the circle with center O is divided into 12 equal arcs, marked the letters A through L as seen below. What is the number of degrees in the sum of the angles x and y ?
- (A) 75 (B) 80 (C) 90 (D) 120 (E) 150



16. The "Middle School Eight" basketball conference has 8 teams. Every season, each team plays every other conference team twice (home and away), and each team also plays 4 games against non-conference opponents. What is the total number of games in a season involving the "Middle School Eight" teams?
- (A) 60 (B) 88 (C) 96 (D) 144 (E) 160
17. George walks 1 mile to school. He leaves home at the same time each day, walks at a steady speed of 3 miles per hour, and arrives just as school begins. Today he was distracted by the pleasant weather and walked the

first $\frac{1}{2}$ mile at a speed of only 2 miles per hour. At how many miles per hour must George run the last $\frac{1}{2}$ mile in order to arrive just as school begins today?

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

18. Four children were born at City Hospital yesterday. Assume each child is equally likely to be a boy or a girl. Which of the following outcomes is most likely

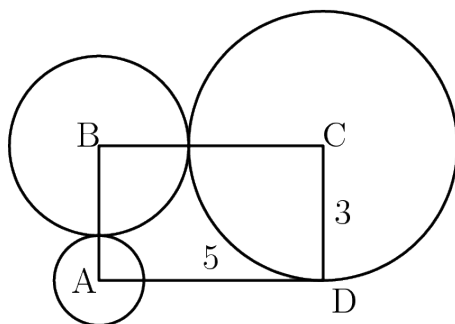
- (A) all 4 are boys
(B) all 4 are girls
(C) 2 are girls and 2 are boys
(D) 3 are of one gender and 1 is of the other gender
(E) all of these outcomes are equally likely

19. A cube with 3-inch edges is to be constructed from 27 smaller cubes with 1-inch edges. Twenty-one of the cubes are colored red and 6 are colored white. If the 3-inch cube is constructed to have the smallest possible white surface area showing, what fraction of the surface area is white?

- (A) $\frac{5}{54}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{5}{27}$ (D) $\frac{2}{9}$ (E) $\frac{1}{3}$

20. Rectangle $ABCD$ has sides $CD = 3$ and $DA = 5$. A circle of radius 1 is centered at A , a circle of radius 2 is centered at B , and a circle of radius 3 is centered at C . Which of the following is closest to the area of the region inside the rectangle but outside all three circles?

- (A) 3.5 (B) 4.0 (C) 4.5 (D) 5.0 (E) 5.5



21. The 7-digit numbers $\overline{74A52B1}$ and $\overline{326AB4C}$ are each multiples of 3. Which of the following could be the value of C ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8

22. A 2-digit number is such that the product of the digits plus the sum of the digits is equal to the number. What is the units digit of the number?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

23. Three members of the Euclid Middle School girls' softball team had the following conversation.

Ashley: I just realized that our uniform numbers are all 2-digit primes.

Bethany: And the sum of your two uniform numbers is the date of my birthday earlier this month.

Caitlin: That's funny. The sum of your two uniform numbers is the date of my birthday later this month.

Ashley: And the sum of your two uniform numbers is today's date.

What number does Caitlin wear?

(A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 23

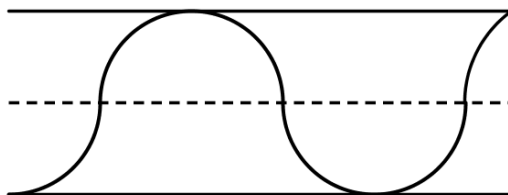
24. One day the Beverage Barn sold 252 cans of soda to 100 customers, and every customer bought at least one can of soda. What is the maximum possible median number of cans of soda bought per customer on that day?

(A) 2.5 (B) 3.0 (C) 3.5 (D) 4.0 (E) 4.5

25. A straight one-mile stretch of highway, 40 feet wide, is closed. Robert rides his bike on a path composed of semicircles as shown. If he rides at 5 miles per hour, how many hours will it take to cover the one-mile stretch?

Note: 1 mile = 5280 feet

(A) $\frac{\pi}{11}$ (B) $\frac{\pi}{10}$ (C) $\frac{\pi}{5}$ (D) $\frac{2\pi}{5}$ (E) $\frac{2\pi}{3}$



ĐỀ BÀI

1. Harry đọc kết quả của phép tính $8 - (2 + 5)$. Còn Terry bỏ các ngoặc và đọc kết quả phép tính $8 - 2 + 5$. Nếu câu trả lời của Harry là H và câu trả lời của Terry là T thì kết quả của phép tính $H - T$ là bao nhiêu?
(A) -10 (B) -6 (C) 0 (D) 6 (E) 10
2. Paul nợ Paula 35 cent. Trong túi của Paul chỉ có các đồng xu 5 cent, 10 cent, 25 cent. Hỏi hiệu giữa số đồng xu nhiều nhất và số đồng xu ít nhất mà Paul có thể dùng để trả nợ là bao nhiêu?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
3. Isabella có một tuần để đọc một cuốn sách do nhà trường giao cho. Cô ấy đọc trung bình 36 trang mỗi ngày trong ba ngày đầu tiên và trung bình 44 trang mỗi ngày trong ba ngày tiếp theo. Ngày cuối cùng cô ấy đọc 10 trang nữa thì đọc xong cuốn sách. Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?
(A) 240 (B) 250 (C) 260 (D) 270 (E) 280.
4. Tổng của hai số nguyên tố là 85. Tích của chúng.
(A) 85 (B) 91 (C) 115 (D) 133 (E) 166.
5. Xe của Margie có thể đi được 32 dặm trên một galông xăng. Hiện nay giá xăng là 4 đô la trên một galông. Hỏi Margie có thể lái xe đi được bao nhiêu dặm nếu cô ấy chỉ có 20 đô la để đổ xăng?
(A) 64 (B) 128 (C) 160 (D) 320 (E) 640
6. Cho 6 hình chữ nhật đều có độ dài một chiều là 2 và độ dài chiều còn lại là 1, 4, 9, 16, 25 và 36. Tính tổng diện tích 6 hình chữ nhật đó.
(A) 91 (B) 93 (C) 162 (D) 182 (E) 202
7. Trong lớp của cô Raub có 28 học sinh, số học sinh nữ nhiều hơn số học sinh nam là 4 bạn. Tính tỉ lệ số học sinh nữ trên số học sinh nam.
(A) $3 : 4$ (B) $4 : 3$ (C) $3 : 2$ (D) $7 : 4$ (E) $2 : 1$
8. Mười một thành viên của câu lạc bộ Toán học dành cho Trung học, mỗi người phải trả cùng số tiền là $1\overline{A2}$ đô la cho một diễn giả là khách mời để họ giảng về cách giải quyết một vấn đề toán học trong buổi giao lưu của câu lạc bộ. Hỏi chữ số A còn thiếu trong số có ba chữ số đó là số nào?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

9. Trong tam giác ABC lấy điểm D nằm trên cạnh AC sao cho $BD = DC$ và $\angle BCD = 70^\circ$. Tính $\angle ADB$ theo độ.
(A) 100 (B) 120 (C) 135 (D) 140 (E) 150
10. Cuộc thi AMC8 được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1985 và sau đó được tổ chức hàng năm. Samantha đã tham gia dự cuộc thi AMC8 lần thứ 7 khi cô 12 tuổi. Hỏi Samantha sinh năm bao nhiêu?
(A) 1979 (B) 1980 (C) 1981 (D) 1982 (E) 1983
11. Jack muốn đạp xe từ nhà anh ấy đến nhà Jill, nhưng bị ngăn bởi ba khối phía đông và hai khối phía bắc so với nhà Jack. Sau khi đạp xe qua mỗi khối Jack có thể tiếp tục rẽ hướng đông hoặc hướng bắc, nhưng anh ấy phải tránh một ngã rẽ nguy hiểm là giao của một khối phía đông và một khối phía bắc. Hỏi có bao nhiêu cách mà Jack có thể đến được nhà Jill bằng xe đạp nếu tất cả có năm lần đi qua các khối.
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 10
12. Một tạp chí đã đăng ba bức ảnh khi còn nhỏ của ba người nổi tiếng. Không thể nhận ra ba người nổi tiếng trong ba bức ảnh đó, độc giả được yêu cầu ghép ba bức ảnh đó đúng với ba người nổi tiếng. Hỏi xác suất để một độc giả ghép ngẫu nhiên đúng cả ba bức hình đó là bao nhiêu?
(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$.
13. Nếu m và n là hai số nguyên và $n^2 + m^2$ là số chẵn thì điều khẳng định nào sau đây là không thể xảy ra.
(A) n và m là chẵn (B) n và m là lẻ (C) $n + m$ là chẵn
(D) $n + m$ là lẻ (E) tất cả các câu trên đều là không thể.
14. Hình chữ nhật $ABCD$ và tam giác vuông DCE có cùng diện tích. Chúng được ghép với nhau thành hình thang như hình vẽ. Tính độ dài cạnh DE .
(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16
15. Chia một đường tròn tâm O thành 12 cung bằng nhau với các điểm chia được kí hiệu từ A đến L như hình vẽ dưới. Hỏi tổng số đo của hai góc x và y lớn nhất bằng bao nhiêu?
(A) 75 (B) 80 (C) 90 (D) 120 (E) 150
16. Trong hội nghị bóng rổ của "Trường Trung học 8" có 8 đội tham gia. Mỗi mùa, mỗi đội phải đấu hai trận với mỗi đội khác trong hội nghị (tại sân nhà và sân khách) và mỗi đội cũng phải đấu 4 trận với các đối thủ ngoài hội nghị. Tính tổng số trận mà các đội "Trường Trung học 8" phải

thi đấu trong mỗi mùa.

(A) 60 (B) 88 (C) 96 (D) 144 (E) 160

17. George phải đi 1 dặm để đến trường. Mỗi ngày anh ấy đều rời khỏi nhà cùng một lúc, đi với vận tốc không đổi 3 dặm trên một giờ, và đến đúng lúc trường bắt đầu học. Hôm nay do ảnh hưởng của thời tiết nên anh ấy chỉ đi được 2 dặm trên một giờ với một nửa quãng đường đầu. Hỏi anh ấy phải đi với vận tốc bao nhiêu ở nửa quãng đường tiếp theo để có thể đến trường kịp giờ?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

18. Ngày hôm qua có bốn em bé được sinh ra tại Bệnh Viện Thành Phố. Biết rằng xác suất mỗi em bé là trai hoặc gái là như nhau. Kết quả nào trong số các kết quả dưới đây có thể xảy ra nhất?

(A) tất cả 4 em bé đều là trai.

(B) tất cả 4 em bé đều là gái.

(C) 2 bé là trai và 2 bé là gái.

(D) 3 bé có cùng giới tính và 1 bé là giới tính khác

(E) tất cả các kết quả trên giống nhau.

19. Một khối lập phương lớn có độ dài cạnh là 3 inch được tạo từ 27 khối lập phương nhỏ với độ dài cạnh bằng 1 inch. Trong đó có 21 khối nhỏ được tô màu đỏ và 6 khối còn lại tô màu trắng. Nếu khối lập phương lớn có diện tích bề mặt được tô màu trắng là nhỏ nhất thì tỉ lệ diện tích bề mặt được tô trắng là bao nhiêu?

(A) $\frac{5}{54}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{5}{27}$ (D) $\frac{2}{9}$ (E) $\frac{1}{3}$

20. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $CD = 3$, $DA = 5$. Vẽ một đường tròn tâm tại A bán kính là 1, một đường tròn tâm tại B bán kính là 2, một đường tròn tâm tại C bán kính là 3. Diện tích phần nằm bên trong hình chữ nhật nhưng nằm bên ngoài cả ba đường tròn gần số nào nhất trong các số sau?

(A) 3.5 (B) 4.0 (C) 4.5 (D) 5.0 (E) 5.5

21. Cho hai số có 7 chữ số $\overline{74A52B1}$ và $\overline{326AB4C}$ đều là bội của 3. Hỏi C có thể là chữ số nào?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8.

22. Một số có hai chữ số mà tích của các chữ số cộng với tổng của các chữ số bằng chính số đó. Hỏi chữ số hàng đơn vị bằng bao nhiêu?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9.

- 23.** Ba thành viên trong đội bóng chày của " Trường trung học nữ Euclid " trò chuyện với nhau như sau
 Ashley: Tôi nhận ra rằng các số trên đồng phục của chúng ta là số nguyên tố có hai chữ số.
 Bethany: Và tổng hai số trên đồng phục hai bạn là ngày sinh nhật của tôi đã trôi qua vào tháng này .
 Caitlin: Thật thú vị, tổng hai số trên đồng phục hai bạn là ngày sinh nhật của tôi sắp tới vào tháng này.
 Ashley: Và tổng hai số trên đồng phục hai bạn là ngày hôm nay.
 Hỏi số trên áo đồng phục của Caitlin là bao nhiêu?
 (A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 23
- 24.** Một ngày, quầy Beverage Barn bán 252 lon sô đa cho 100 khách hàng, và mỗi khách hàng mua ít nhất một lon sô đa. Hỏi số trung vị số lon sô đa mua bởi mỗi khách hàng vào ngày hôm đó có thể lớn nhất bằng bao nhiêu?
 (A) 2.5 (B) 3.0 (C) 3.5 (D) 4.0 (E) 4.5
- 25.** Một đoạn đường quốc lộ, rộng 40 feet. Robert đạp xe theo đường đi là các nửa đường tròn như hình vẽ dưới. Nếu anh ấy đi 5 dặm một giờ thì anh ấy sẽ phải mất bao nhiêu lâu để có thể đi đoạn đường đó? Biết rằng 1 dặm = 5280 feet.
 (A) $\frac{\pi}{11}$ (B) $\frac{\pi}{10}$ (C) $\frac{\pi}{5}$ (D) $\frac{2\pi}{5}$ (E) $\frac{2\pi}{3}$

SOLUTIONS - LỜI GIẢI

- 1.** We have $H = 8 - 7 = 1$ and $T = 8 - 2 + 5 = 11$. Clearly $1 - 11 = \boxed{-10}$, so our answer is $\boxed{\text{(A)}}$.
- Ta có $H = 8 - 7 = 1$ và $T = 8 - 2 + 5 = 11$. Vậy câu trả lời là $1 - 11 = \boxed{-10}$.
- 2.** The fewest amount of coins that can be used is 2 (a quarter and a dime). The greatest amount is 7, if he uses all nickels. Therefore we have $7 - 2 = 5$, or $\boxed{\text{(E)}}$.
- Số đồng xu ít nhất có thể sử dụng là 2 (đồng xu 10 cent và đồng xu 25), số đồng xu nhiều nhất là 7 (7 đồng xu 5 cent). Khi đó ta có $7 - 2 = 5$.

3. Isabella read $3 \cdot 36 + 3 \cdot 44$ pages in the first 6 days. Although this can be calculated directly, it is simpler to calculate it as $3 \cdot (36 + 44) = 3 \cdot 80$, which gives that she read 240 pages. However, she read 10 more pages on the last day, for a total of $240 + 10 = \text{(B)} 250$ pages.

• Isabella đọc được $3 \cdot 36 + 3 \cdot 44 = 3 \cdot (36 + 44) = 3 \cdot 80 = 240$ trang trong 6 ngày đầu tiên. Cô ấy đã đọc 10 trang vào ngày cuối cùng nên tổng số trang cô ấy đọc là $240 + 10 = 250$ trang.

4. Since the two prime numbers sum to an odd number, one of them must be even. The only even prime number is 2. The other prime number is $85 - 2 = 83$, and the product of these two numbers is $83 \cdot 2 = \boxed{166}$, or **(E)**.

• Do tổng của hai số nguyên tố là số lẻ nên một trong chúng phải là số chẵn. Số nguyên tố chẵn duy nhất là 2. Vậy số nguyên tố còn lại là $85 - 2 = 83$, suy ra tích của chúng là $83 \cdot 2 = \boxed{166}$.

5. Margie can afford $20/4 = 5$ gallons of gas. She can go $32 \cdot 5 = \boxed{160}$ miles on this amount of gas.

• Margie có thể mua được $20/4 = 5$ galông xăng. Do đó cô ấy có thể đi được $32 \cdot 5 = \boxed{160}$ dặm với lượng xăng đó.

6. The sum of the areas is equal to $2 \times 1 + 2 \times 4 + 2 \times 9 + 2 \times 16 + 2 \times 25 + 2 \times 36$. This is simply equal to $2 \times (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)$, which is equal to 2×91 , which is equal to our final answer of $\boxed{182 : \text{(D)}}$.

• Tổng diện tích sáu hình chữ nhật đó là $2 \times 1 + 2 \times 4 + 2 \times 9 + 2 \times 16 + 2 \times 25 + 2 \times 36 = 2 \times (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = 2 \times 91 = 182$

7. We can set up an equation with x being the number of girls in the class. The number of boys in the class is equal to $x - 4$. Since the total number of students is equal to 28, we get $x + x - 4 = 28$. Solving this equation, we get $x = 16$. There are $16 - 4 = 12$ boys in our class, and our answer is $16 : 12 = \boxed{4 : 3}$, or **(B)**.

• Gọi x là số học sinh nữ trong lớp. Suy ra số học sinh nam trong lớp là $x - 4$. Do tổng số các học sinh là 28 nên $x + x - 4 = 28$. Giải phương trình đó ta được $x = 16$. Vậy có $16 - 4 = 12$ học sinh nam trong lớp nên tỉ lệ đó là $16 : 12 = \boxed{4 : 3}$. or **(D)**

8. A number is divisible by 11 if the difference between the sum of the digits in the odd-numbered slots (e.g. the ones slot, the hundreds slot, etc.) and

the sum in the even-numbered slots (e.g. the tens slot, the thousands slot) is a multiple of 11. So $1 + 2 - A$ is equivalent to 0 (mod 11). Clearly 3, A cannot be equal to 11 or any multiple of 11 greater than that. So $3 - A = 0 \rightarrow A = 3$, and our answer is **(D)3**.

• Ta biết rằng một số chia hết cho 11 nếu hiệu của tổng của các chữ số ở vị trí lẻ (như chữ số hàng đơn vị hoặc chữ số hàng trăm) và tổng của các chữ số ở vị trí chẵn (như chữ số hàng chục hoặc chữ số hàng nghìn) là bội của 11. Do đó, $1 + 2 - A$ đồng dư với 0 (mod 11). Rõ ràng A chính là số 3 vì hiệu đó không thể bằng 11 hoặc bằng bội khác 0 của 11.

9. $BD = DC$, so $\angle DBC = \angle DCB = 70^\circ$. Then $\angle CDB = 40^\circ$. Since angle ADB and BDC are supplementary, $\angle ADB = 180^\circ - 40^\circ = \mathbf{(D)140^\circ}$.

• Do $BD = DC$ nên $\angle DBC = \angle DCB = 70^\circ$. Suy ra $\angle CDB = 40^\circ$. Do $\angle ADB$ và $\angle BDC$ phụ nhau nên $\angle ADB = 180^\circ - 40^\circ = \mathbf{(D)140^\circ}$.

10. The seventh AMC8 would have been given in 1991, when Samantha was 12. Therefore, she was born in $1991 - 12 = 1979$, or **(A)**.

• Cuộc thi AMC8 lần thứ 7 được tổ chức vào năm 1991, khi đó Samantha 12 tuổi. Do đó, cô ấy sinh năm $1991 - 12 = 1979$ hay đáp án là **(A)**.

11. We can apply complementary counting and count the paths that DO go through the blocked intersection, which is $\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 6$. There are a total of $\binom{5}{2} = 10$ paths, so there are $10 - 6 = 4$ paths possible. **(A)** is the correct answer.

• Tổng số con đường là $\binom{5}{2} = 10$. Số con đường bị chặn là $\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 6$. Vậy số con đường có thể đi là $10 - 6 = 4$ hay đáp án là **(A)**.

12. There is a $\frac{1}{3}$ chance that the reader will choose the correct baby picture for the first person. Next, the second person gives a $\frac{1}{2}$ chance, and the last person leaves only 1 choice. Thus, the probability is $\frac{1}{3 \cdot 2} = \mathbf{(B) \frac{1}{6}}$.

• Có $\frac{1}{3}$ cơ hội để độc giả chọn đúng bức ảnh khi còn nhỏ cho người thứ nhất. Tiếp theo, người thứ hai có $\frac{1}{2}$ cơ hội và người cuối cùng chỉ có duy

nhất một cách chọn. Do vậy xác suất đó là $\frac{1}{3 \cdot 2} = \boxed{\text{(B)} \frac{1}{6}}$.

13. Since $n^2 + m^2$ is even, either both n^2 and m^2 are even, or they are both odd. Therefore, n and m are either both even or both odd, since the square of an even number is even and the square of an odd number is odd. As a result, $n + m$ must be even. The answer, then, is $\boxed{\text{(D)}}$.

• Do $n^2 + m^2$ là số chẵn nên cả hai n^2 và m^2 hoặc cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do bình phương của một số chẵn là số chẵn và bình phương của một số lẻ là số lẻ nên cả hai n và m hoặc cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Suy ra $n + m$ là số chẵn. Do đó câu trả lời là $\boxed{\text{(D)}}$.

14. The area of $\triangle CDE$ is $\frac{DC \cdot CE}{2}$. The area of $ABCD$ is $AB \cdot AD = 5 \cdot 6 = 30$, which also must be equal to the area of $\triangle CDE$, which, since $DC = 5$, must in turn equal $\frac{5 \cdot CE}{2}$. Through transitivity, then, $\frac{5 \cdot CE}{2} = 30$, and $CE = 12$. It should be apparent that $\triangle CDE$ is a $5 - 12 - 13$ triangle, so $DE = \boxed{13}$, or $\boxed{\text{(B)}}$

• Diện tích của $\triangle CDE$ là $\frac{DC \cdot CE}{2}$. Diện tích của $ABCD$ là $AB \cdot AD = 5 \cdot 6 = 30$, nó cũng phải bằng diện tích của $\triangle CDE$ và bằng $\frac{DC \cdot CE}{2} = \frac{5 \cdot CE}{2}$, suy ra $CE = 12$. Sử dụng Định lí Pytago cho $\triangle CDE$ nên $DE = \boxed{13(\text{B})}$.

15. For this problem, it is useful to know that the measure of an inscribed angle is half the measure of its corresponding central angle. Since each unit arc is $\frac{1}{12}$ of the circle's circumference, each unit central angle measures $\left(\frac{360}{12}\right)^\circ = 30^\circ$. Then, we know that the inscribed arc of $\angle x = 60^\circ$ so $m\angle x = 30^\circ$; and the inscribed arc of $\angle y = 120^\circ$ so $m\angle y = 60^\circ$. $m\angle x + m\angle y = 30^\circ + 60^\circ = \boxed{\text{(C)} 90^\circ}$.

• Đối với bài toán này, ta sử dụng kết quả đã biết là góc nội tiếp bằng một nửa góc ở tâm chắn cùng một cung. Do mỗi cung nhỏ có độ dài bằng $\frac{1}{12}$ chu vi đường tròn nên số đo mỗi cung là $\left(\frac{360}{12}\right)^\circ = 30^\circ$. Do đó số đo góc nội tiếp $\angle x = 30^\circ$ và góc nội tiếp $\angle y = 60^\circ$. Vậy $\angle x + \angle y = 30^\circ + 60^\circ = \boxed{\text{(C)} 90^\circ}$.

16. Within the conference, there are 8 teams, so there are $\binom{8}{2} = 28$ pairings of teams, and each pair must play two games, for a total of $28 \cdot 2 = 56$ games within the conference.

Each team also plays 4 games outside the conference, and there are 8 teams, so there are a total of $4 \cdot 8 = 32$ games outside the conference.

Therefore, the total number of games is $56 + 32 = \boxed{88}$, so **(B)** is our answer.

- Xét trong phạm vi hội nghị thì có 8 đội nên có $\binom{8}{2} = 28$ cặp, và mỗi cặp phải đấu hai trận, do đó tổng số trận trong phạm vi hội nghị là $28 \cdot 2 = 56$.

Mỗi đội cũng đấu 4 trận với các đội ngoài hội nghị, và có 8 đội nên có tổng số trận với các đội ngoài hội nghị là $4 \cdot 8 = 32$.

Vậy tổng số tất cả các trận là $56 + 32 = \boxed{\text{(B)}88}$.

17. Note that on a normal day, it takes him $1/3$ hour to get to school. However, today it took $\frac{1/2 \text{ mile}}{2 \text{ mph}} = 1/4$ hour to walk the first $1/2$ mile. That means that he has $1/3 - 1/4 = 1/12$ hours left to get to school, and $1/2$ mile left to go. Therefore, his speed must be $\frac{1/2 \text{ mile}}{1/12 \text{ hour}} = \boxed{6 \text{ mph}}$, so **(B)** is the answer.

- Chú ý rằng vào mỗi ngày thường thì anh ấy đi $\frac{1}{3}$ h thì đến trường. Tuy nhiên, hôm nay phải mất $\frac{1/2 \text{ dặm}}{2 \text{ dặm/h}} = 1/4$ h đi được $\frac{1}{2}$ dặm đầu. Điều này có nghĩa là anh ấy còn $1/3 - 1/4 = 1/12$ h để đến trường, và $\frac{1}{2}$ dặm để đi. Do đó vận tốc của anh ấy sẽ phải đi trong nửa quãng đường sau là $\frac{1/2 \text{ dặm}}{1/12 \text{ h}} = \boxed{\text{(B)}6 \text{ dặm/h}}$.

18. We'll just start by breaking cases down. The probability of **(A)** occurring is $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. The probability of **(B)** occurring is $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. The probability of **(C)** occurring is $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$, because we need to choose 2 of the 4 children to be girls.

For **(D)**, there are two possible cases, 3 girls and 1 boy or 3 boys and 1 girl. The probability of the first case is $\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$ because we need to choose 1 of the 4 children to be a boy. However, the second case has the same probability because we are choosing 1 of the 4 children to be a girl, so the total probability is $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$.

So out of the four fractions, **(D)** is the largest. So our answer is

(D) 3 of one gender and 1 of the other.

• Xác suất để trường hợp **(A)** xảy ra là $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Xác suất để trường hợp **(B)** xảy ra là $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Xác suất để trường hợp **(C)** xảy ra là $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$, vì chúng ta phải chọn 2 trong 4 em bé là bé gái. Với trường hợp **(D)** có hai trường hợp nhỏ, trường hợp 3 gái và 1 trai xác suất là $\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$, và bằng xác suất trường hợp 3 trai 1 gái, nên tổng xác suất trường hợp **(D)** là $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$.

So sánh các kết quả ta thấy **(D)** là trường hợp có xác suất lớn nhất.

19. For the least possible surface area, we should have 1 cube in the center, and the other 5 with only 1 face exposed. This gives 5 square inches of white surface area. Since the cube has a surface area of 54 square inches, our answer is **(A)** $\frac{5}{54}$.

• Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì chúng ta phải đặt một khối màu trắng làm trung tâm và năm khối còn lại chỉ có một mặt bị lộ ra ngoài. Khi đó thì diện tích bề mặt màu trắng là 5 inch^2 . Trong khi đó khối lập phương lớn có tổng diện tích bề mặt là 54 inch^2 . Do đó câu trả lời là **(A)** $\frac{5}{54}$.

20. The area in the rectangle but outside the circles is the area of the rectangle minus the area of all three of the quarter circles in the rectangle.

The area of the rectangle is $3 \cdot 5 = 15$. The area of all 3 quarter circles is $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi(2)^2}{4} + \frac{\pi(3)^2}{4} = \frac{14\pi}{4} = \frac{7\pi}{2}$. Therefore the area in the rectangle but