ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ

77
07/2009

2 TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

55 năm Nam Định, thành phố đầu tiên của Việt Nam giải phóng (1.7.1954 - 1.7.2009)

CUỘC THI KHÁM PHÁ TRÍ TUỆ VIỆT LẦN THỨ NHẤT

Cuộc thi diễn ra ngày 31.5.2009, do Sở GD-ĐT Hà Nội, tạp chí Toán Tuổi thơ phối hợp tổ chức, trường THCS Trưng Vương, Trung tâm hỗ trợ nghiên cứu các sản phẩm trí tuệ phối hợp thực hiện.

Đến dự cuộc thi có GS. TSKH. Trần Văn Nhung, nguyên Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, Tổng thư kí Hội đồng chức danh giáo sư nhà nước, ông Nguyễn Hữu Hiếu, Phó giám đốc Sở GD-ĐT Hà Nội, ThS. Vũ Kim Thủy, Phó tổng biên tập tạp chí Toán Tuổi thơ, Trưởng ban Tổ chức, ông Trần Phương, Giám đốc Trung tâm hỗ trợ nghiên cứu các sản phẩm trí tuệ...

Tham dự cuộc thi có đại diện của 78 trường tiểu học và THCS của Hà Nội với hơn 800 học sinh. Giải thưởng cho cá nhân và tập thể gồm 2 giải nhất, 4 giải nhì, 6 giải ba và 8 giải khuyến khích mỗi loại.

Trần Minh Tuấn, Trần Hoàng Hải, trường Hà Nội-Amsterdam đoạt giải Nhất cá nhân, trường THCS Trưng Vương và TH Trưng Vương Nhất đồng đội.

GS. TSKH. Trần Văn Nhung

Trao giải Nhất cá nhân

GAME SHOW 1, 2, 3, 4, 5

HOÀNG TRỌNG

TÌM CỰC TRỊ bằng phương pháp bậc hai

KIỀU ĐÌNH MINH *(GV. THPT Thanh Ba, Phú Thọ)*

Có nhiều phương pháp khác nhau để tìm cực trị của một biểu thức, trong đó có phương pháp bậc hai. Chẳng hạn, ta đưa một biểu thức về dạng $a(x + m)^2 + b$ rồi căn cứ vào điều kiện của x để tìm cực trị. Ngoài ra, ta có thể căn cứ vào điều kiện có nghiệm của một phương trình bậc hai để tìm cực trị.

Sau đây là một số ví dụ.

Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y = x + \sqrt{2(1-x)},\ 0 \le x \le 1$.

(Thi chuyên toán ĐHSP Hà Nội, 2008)

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{2(1-x)} \Rightarrow t^2 = 2(1-x)$.

Suy ra $x = 1 - \dfrac{t^2}{2}$ và $y = -\dfrac{t^2}{2} + t + 1$.

Vì $0 \le x \le 1$ nên $0 \le t \le \sqrt{2}$.

Ta có $y = -\dfrac{t^2}{2} + t + 1 = -\dfrac{(t-1)^2}{2} + \dfrac{3}{2} \le \dfrac{3}{2}$.

$y = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow t = 1$ (thỏa mãn) $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $y_{max} = \dfrac{3}{2}$ tại $x = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 2. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^4 + y^4 - x^2y^2.$$

Lời giải. Đặt $t = xy$ thì $x^2 + y^2 = t + 1$.

Vì $(x - y)^2 \ge 0$ nên $t + 1 - 2t \ge 0 \Leftrightarrow t \le 1$.

Vì $(x + y)^2 \ge 0$ nên $t + 1 + 2t \ge 0 \Leftrightarrow t \ge -\dfrac{1}{3}$.

Vậy $-\dfrac{1}{3} \le t \le 1$.

Ta có $A = x^4 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 =$
$= (t + 1)^2 - 3t^2 = -2t^2 + 2t + 1 =$
$= -2\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2}$.

Vì $-\dfrac{1}{3} \le t \le 1$ nên $-\dfrac{5}{6} \le t - \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $0 \le \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 \le \dfrac{25}{36}$.

Do đó $-2 \cdot \dfrac{25}{36} + \dfrac{3}{2} \le A \le \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{9} \le A \le \dfrac{3}{2}$.

Bạn đọc tự tìm các giá trị của x và y để xảy ra các đẳng thức ở trên.

Vậy $A_{max} = \dfrac{3}{2},\ A_{min} = \dfrac{1}{9}$.

Bài toán 3. Cho các số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = x + y + z + xy + yz + zx.$$

Lời giải. Đặt $t = x + y + z$ thì

$t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$.

Suy ra $xy + yz + zx = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, $B = t + \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

Vì $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \ge 0$ nên

$2(x^2 + y^2 + z^2) \ge 2(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \ge (x + y + z)^2$

$\Leftrightarrow 3 \ge t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$.

Tương tự như *bài toán 2*, ta biến đổi $B = \frac{(t+1)^2}{2} - 1$ và tìm được

$$B_{max} = 1 + \sqrt{3}, B_{min} = -\frac{1}{2}.$$

Bài toán 4. Cho x, y > 0 và x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

(Thi chuyên toán ĐHKHTN Hà Nội, 1999)

Lời giải. Ta có $P = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2.$

Đặt $t = x^2y^2$ (với t > 0) thì $P = t + \frac{1}{t} + 2.$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow 1 \geq 2\sqrt{xy}.$$

Suy ra $xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow t \leq \frac{1}{16}.$

Vậy $0 < t \leq \frac{1}{16}.$

Khi đó ta có $P = \frac{t^2+1}{t} + 2 =$

$= \frac{(1-16t)^2 + 32t - 255t^2}{t} + 2 =$

$= \frac{(1-16t)^2}{t} - 255t + 34 \geq -255t + 34 \geq$

$\geq -255 \cdot \frac{1}{16} + 34 = \frac{289}{16}.$

Vậy $P_{min} = \frac{289}{16}$, tại $t = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$

Bài toán 5. Cho $x \geq -1, y \geq -2$ là các số thực thỏa mãn $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y.$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức C = x + y.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra

$$C = x + y = 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2}).$$

Đặt $u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{y+2}$ (với $u, v \geq 0$) thì $x = u^2 - 1, y = v^2 - 2, C = u^2 + v^2 - 3 =$ $= 3(u + v).$

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = \frac{C}{3} \\ u^2 + v^2 = C + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \frac{C}{3} \\ (u+v)^2 - 2uv = C + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \frac{C}{3} \\ uv = \frac{C^2 - 9C - 27}{18}. \end{cases}$$

Theo định lí Vi-ét đảo thì u, v là hai nghiệm của phương trình

$$t^2 - \frac{C}{3}t + \frac{C^2 - 9C - 27}{18} = 0$$

$$\Leftrightarrow 18t^2 - 6Ct + C^2 - 9C - 27 = 0. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm $u, v \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9(C^2 - 18C - 54) \geq 0 \\ \frac{C}{3} \geq 0 \\ \frac{C^2 - 9C - 27}{18} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9 + 3\sqrt{21}}{2} \leq C \leq 9 + 3\sqrt{15}.$$

Từ đó tìm được

$$C_{max} = 9 + 3\sqrt{15}, C_{min} = \frac{9 + 3\sqrt{21}}{2}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $2(x^2 + y^2) = xy + 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2.$$

Bài 2. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$N = x^2 + xy - 2y^2.$$