



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
10 2015
SỐ 460

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>





NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

QUY TẮC "BIÊN"

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(3/29E, Đà Nẵng, Hải Phòng)

Trong quá trình giải toán, ngoài việc nắm vững kiến thức cơ bản chúng ta còn phải biết vận dụng một số phương pháp giải toán đặc biệt. Ví dụ như phương pháp phản chứng, phương pháp quy nạp toán học, nguyên tắc Dirichlet, nguyên tắc cực hạn,... Ở bài viết này chúng tôi muốn trao đổi thêm với các bạn về nguyên tắc cực hạn. Tôi nói "thêm" là vì vấn đề này cũng đã có một số tác giả đề cập đến trong các số Tạp chí trước đây. Có người gọi đó là nguyên tắc "Khởi đầu cực trị", nguyên tắc cực hạn, còn theo tôi thì có lẽ gọi là quy tắc "biên" là hợp lý! Vì quy tắc này khuyên chúng ta khi giải một số các bài toán thì hãy nhìn các yếu tố rộng ra bên ngoài (biên), ví dụ đối với một đoạn thẳng ta nên quan tâm đến hai đầu mút của nó, đối với một tập hợp số ta nên quan tâm đến các giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất, ...

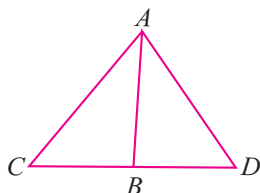
Sau đây ta sẽ xem quy tắc này được áp dụng như thế nào thông qua các thí dụ cụ thể.

Thí dụ 1. Trên đường thẳng cho một tập điểm M sao cho mỗi điểm của M là trung điểm của một đoạn thẳng nối hai điểm khác thuộc M . Chứng minh rằng M là một tập hợp vô hạn.

Lời giải. Giả sử đường thẳng đã cho đặt nằm ngang và giả sử M là tập hợp hữu hạn.

Khi đó trong số các điểm của M phải có một điểm nằm tận cùng bên trái (biên trái), gọi điểm đó là A . Rõ ràng A không thể là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm khác của M , suy ra $A \notin M$. Điều này trái với giả sử. Vậy M là tập hợp vô hạn.

Thí dụ 2. Trên mặt phẳng cho một tập điểm M sao cho mỗi điểm của M là trung điểm của một đoạn thẳng nối hai điểm khác thuộc M . Chứng minh rằng M là một tập hợp vô hạn.



Hình 1

Lời giải. (h.1) Giả sử M là tập hợp hữu hạn. Vì M là tập hữu hạn nên số các đoạn thẳng nối hai điểm bất

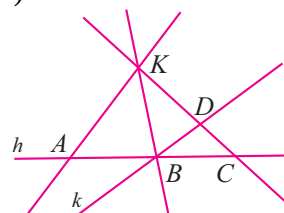
kì thuộc M cũng hữu hạn, do đó phải tồn tại một đoạn thẳng có độ dài lớn nhất, giả sử đó là đoạn AB . Theo đề bài thì B phải là trung điểm của đoạn thẳng CD nào đó ($C, D \in M$). Để chứng minh được: Nếu $AB \perp CD$ thì $AC = AD > AB$; nếu AB không vuông góc với CD thì $\widehat{ABC}$ tù hoặc $\widehat{ABD}$ tù, khi đó hoặc $AC > AB$, hoặc $AD > AB$, điều này trái với việc chọn đoạn AB . Vậy M là tập hợp vô hạn.

Thí dụ 3. Trên mặt phẳng cho n đường thẳng ($n \geq 3$), trong đó không có hai đường nào song song, không có ba đường nào đồng quy, các đường thẳng này chia mặt phẳng thành những phần. Chứng minh rằng nếu lấy bất kì đường thẳng nào trong số đó thì bao giờ cũng có phần mặt phẳng kề với đường thẳng đó có hình tam giác.

Lời giải. Gọi các đường thẳng đã cho là $d_1, d_2, \dots, d_n$. Xét đường thẳng d_1 , từ tất cả các giao điểm của các đường thẳng còn lại, ta chọn ra một giao điểm có khoảng cách đến d_1 nhỏ nhất. Giả sử đó là giao điểm của hai đường thẳng d_2 và d_3 . Dễ dàng chứng minh được hình tạo bởi ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 là tam giác thỏa mãn đề bài.

Thí dụ 4. Trên mặt phẳng cho n đường thẳng ($n \geq 3$), hai đường thẳng bất kì trong n đường thẳng đó đều cắt nhau và qua mỗi giao điểm đó còn có thêm ít nhất một đường thẳng khác đi qua. Chứng minh rằng tất cả n đường thẳng đó đồng quy.

Lời giải. (h.2)



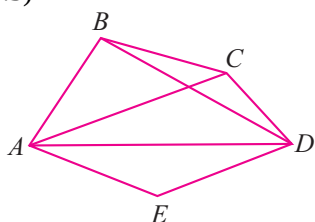
Hình 2

Giả sử n đường thẳng đó không đồng quy, nghĩa là chúng cắt nhau tại ít nhất 2 điểm, giả sử K là một

trong các điểm đó. Trong các đường thẳng không đi qua K , giả sử h là đường thẳng có khoảng cách đến K là nhỏ nhất. Giả sử qua K có ba đường thẳng cắt đường thẳng h tại A, B, C (theo thứ tự đó). Theo đề bài thì qua B còn có một đường thẳng nữa, giả sử đó là đường thẳng k , đường thẳng này cắt KC (hoặc KA) tại D . Rõ ràng D phải là điểm trong của KC (hoặc KA) và khi đó dễ thấy D gần đường thẳng h hơn K – điều này trái với việc chọn điểm K và đường thẳng h , từ đó ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 5. Chứng minh rằng trong một ngũ giác lồi bất kì luôn tìm được ba đường chéo có độ dài là ba cạnh của một tam giác.

Lời giải. (h.3)

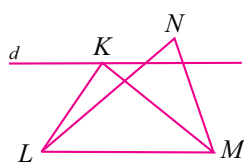


Hình 3

Giả sử AD là đường chéo lớn nhất của ngũ giác lồi $ABCDE$, ta sẽ chứng minh ba đường chéo AD, AC, BD tạo thành một tam giác. Nghĩa là ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $AD < AC + BD$ là xong. Điều này hoàn toàn hiển nhiên dựa vào bất đẳng thức tam giác.

Thí dụ 6. Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$), biết rằng diện tích của tam giác bất kì với ba đỉnh trong n điểm đó không lớn hơn 1. Chứng minh rằng tất cả n điểm đó có thể chứa trong một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải. (h.4) Xét tất cả các tam giác có đỉnh tại n điểm đã cho, rõ ràng số tam giác đó là hữu hạn, do đó tồn tại một tam giác có diện tích lớn nhất, giả sử đó là tam giác KLM . Qua

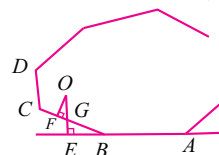


Hình 4

K vẽ đường thẳng $d \parallel LM$. Nếu N là điểm nằm khác phía L so với d thì $S_{NLM} > S_{KLM}$, do đó tất cả các điểm đã cho phải nằm cùng một phía đối với đường thẳng d . Tương tự qua L và M vẽ các đường thẳng $l \parallel KM, m \parallel KL$ thì tất cả n điểm đã cho phải nằm trong (hoặc trên cạnh) của tam giác tạo bởi ba đường thẳng d, l, m . Rõ ràng tam giác này có diện tích bằng bốn lần diện tích tam giác KLM . Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 7. Giả sử O là một điểm nằm trong một đa giác lồi nào đó, từ O hạ các đường vuông góc xuống các cạnh của đa giác. Chứng minh rằng ít nhất có chân của một trong các đường vuông góc đó nằm trên một cạnh của đa giác (chứ không phải nằm trên phần kéo dài của nó).

Lời giải. (h.5) Trong các khoảng cách từ O đến các cạnh của đa giác, giả sử khoảng cách từ O đến cạnh AB là nhỏ nhất (đó là đường vuông góc OE). Ta sẽ chứng minh điểm E phải thuộc cạnh AB . Giả sử E nằm ngoài cạnh AB , khi đó OE phải cắt một trong các cạnh của đa giác tại G . Dễ thấy $OF < OG < OE$, nghĩa là điểm O gần cạnh BC hơn là cạnh AB . Điều này trái với việc chọn cạnh AB , từ đó ta có điều phải chứng minh.



Hình 5

Thí dụ 8. Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua 3 điểm trong số các điểm đã cho mà không chứa trong nó điểm nào trong số các điểm còn lại.

Lời giải. Vì số khoảng cách giữa hai điểm trong n điểm đã cho là hữu hạn nên ta chọn hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất, giả sử hai điểm đó là A, B . Từ $n - 2$ điểm còn lại ta nói đến A và B . Trong số các góc tạo thành nhìn đoạn AB , ta chọn điểm mà từ đó nhìn đoạn AB dưới góc lớn nhất, giả sử đó là điểm C (để ý rằng $\widehat{ACB} \leq 60^\circ$). Đường tròn đi qua ba điểm A, B, C là đường tròn phải tìm. Thật vậy:

- Nếu có một điểm D nằm trong đường tròn và cùng phía với C thì $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$ (vô lí).
- Nếu D nằm trong đường tròn và khác phía với C thì $\widehat{ADB}$ là góc tù, do đó $AB > AD$ và $AB > BD$ (vô lí). Vậy ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 9. Cho bảy số nguyên dương khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_7$ có tổng bằng 100. Chứng minh rằng trong đó có ba số có tổng không nhỏ hơn 50.

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_7$. Ta cần xét tổng ba số lớn nhất và sẽ chứng minh $a_5 + a_6 + a_7 \geq 50$. Thật vậy:

- Nếu $a_5 \geq 16$ thì $a_6 \geq 17, a_7 \geq 18$, do đó $a_5 + a_6 + a_7 \geq 16 + 17 + 18 = 51$.
- Nếu $a_5 \leq 15$ thì $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50$, khi đó ta cũng có $a_5 + a_6 + a_7 \geq 50$. Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 10. Trên một đường tròn cho n số tự nhiên, biết rằng mỗi số bằng trung bình cộng của hai số kề với nó. Chứng minh rằng tất cả các số trên đường tròn đều bằng nhau.

Lời giải. Tất nhiên trong n số tự nhiên đó phải có số nhỏ nhất, gọi số đó là m . Giả sử hai số kề với m là a và b , theo đề bài ta có $a + b = 2m$ (1). Vì $a \geq m, b \geq m$, nên nếu một trong hai bất đẳng thức đó thực sự lớn hơn thì sẽ có $a + b > 2m$, điều này trái với (1). Vậy phải có $a = b = m$.

Lí luận tương tự ta được tất cả các số trên đường tròn đều bằng m .

Thí dụ 11. Trên các ô của bàn cờ hình vuông $n \times n$ đặt những cái tháp với điều kiện: Nếu có một ô nào đó trống thì tổng số tháp đặt trên đường nằm ngang và đường thẳng đứng qua ô đó không nhỏ hơn n . Chứng minh rằng trên bàn cờ đó có không ít hơn $\frac{n^2}{2}$ tháp.

Lời giải. Xét một trong n đường nằm ngang và n đường thẳng đứng mà trong đó có ít tháp nhất. Giả sử đó là đường nằm ngang và trên đó có k tháp.

• Nếu $k \geq \frac{n}{2}$ thì số tháp trên bàn cờ không ít hơn

$$n \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

• Nếu $k < \frac{n}{2}$, do trên đường nằm ngang đang xét có $n - k$ ô trống và mỗi cột đi qua các ô trống này có không ít hơn $n - k$ tháp (theo đề bài) nên tất cả các cột như vậy sẽ có không ít hơn $(n - k)^2$ tháp. Còn lại k cột, mỗi cột có không ít hơn k tháp. Do đó tất cả số tháp có trên bàn cờ không ít hơn $(n - k)^2 + k^2$. Ta chỉ còn phải chứng minh rằng $(n - k)^2 + k^2 \geq \frac{n^2}{2}$. Rõ ràng BĐT này luôn đúng vì

$$\text{nó tương đương với bất đẳng thức } 2\left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \geq 0.$$

– Nếu n là số chẵn thì ta có thể đặt các tháp hoàn toàn trong các ô đen hoặc các ô trắng.

– Nếu n là số lẻ thì ta sẽ đặt được $\frac{n^2 + 1}{2}$ tháp

bằng cách: Một tháp đặt ở một trong các góc, các tháp còn lại đặt ở trong các ô cùng màu.

Thí dụ 12. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y, z, u thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$ (1).

Lời giải. Giả sử tồn tại bốn số x, y, z, u thỏa mãn (1). Ta xét bộ bốn số như vậy sao cho $x^2 + y^2$ có giá trị nhỏ nhất. Giả sử bốn số đó là a, b, c, d . Từ đẳng thức $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ suy ra $a^2 + b^2 : 3 \Rightarrow a : 3$ và $b : 3$.

Đặt $a = 3m, b = 3n$ ($m, n \in \mathbb{Z}^+$), thay vào đẳng thức trên ta được $9m^2 + 9n^2 = 3(c^2 + d^2)$ hay $c^2 + d^2 = 3(m^2 + n^2)$, nghĩa là ta lại tìm được bộ bốn số c, d, m, n thỏa mãn (1) đồng thời $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$. Điều này trái với việc chọn các số a, b, c, d . Từ đó ta có điều phải chứng minh.

✪ Các bạn thân mến! Trên đây là một số thí dụ minh họa cho phương pháp vận dụng nguyên tắc cực hạn vào việc giải một số bài toán mà nếu không có phương pháp này chắc chắn chúng ta sẽ gặp khó khăn. Cuối cùng mong các bạn áp dụng phương pháp này để luyện tập giải các bài toán sau, chúc các bạn thành công:

1. Cho M là tập hợp các số thực khác nhau, biết rằng mỗi số của M là trung bình cộng của hai số nào đó cũng thuộc M . Chứng minh rằng M là tập hợp vô hạn.

2. Trên mặt phẳng vô hạn có kẻ ô vuông người ta viết các số tự nhiên sao cho mỗi số là trung bình cộng của bốn số lân cận (số trên, số dưới, số trái, số phải). Chứng minh rằng tất cả các số trên mặt phẳng đều bằng nhau.

3. Có $2n + 1$ quả cân, khối lượng mỗi quả là một số nguyên. Biết rằng từ $2n$ quả tùy ý bao giờ cũng có thể chia được thành hai nhóm có khối lượng bằng nhau, mỗi nhóm có n quả. Chứng minh rằng tất cả các quả cân đó có khối lượng bằng nhau.

4. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ không có nghiệm nguyên dương.

5. Chứng minh rằng trong một lục giác lồi luôn tồn tại một đỉnh mà ba đường chéo xuất phát từ đỉnh đó là độ dài ba cạnh của một tam giác.

6. Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$), biết rằng mỗi đường thẳng đi qua hai điểm trong số đó còn đi qua ít nhất một điểm trong số $n - 2$ điểm còn lại. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho cùng nằm trên một đường thẳng.

7. Trên mặt phẳng cho $2n$ điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng, trong đó có n điểm xanh và n điểm đỏ. Chứng minh rằng có thể nối mỗi điểm xanh với một điểm đỏ bằng một đoạn thẳng sao cho trong n đoạn thẳng nhận được không có hai đoạn nào giao nhau.

8. Chứng minh rằng nếu một đa giác có nhiều trục đối xứng thì các trục đối xứng đó phải đồng quy.