



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

1 2017
Số 475

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

Happy
New Year

2017



Chúc Mừng Năm Mới



Đoài những phương trình có quy tắc giải như phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai, ... thì phương trình nghiệm nguyên thường không có quy tắc giải tổng quát. Mỗi bài toán, với điều kiện riêng của nó đòi hỏi phải tìm ra cách giải riêng phù hợp. Có rất nhiều phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên, trong bài viết này tôi giới thiệu một số ví dụ minh họa cho một phương pháp giải thường dùng đó là phương pháp sử dụng tính chất chia hết trên tập hợp số nguyên.

1. SỬ DỤNG TÍNH CHẴN, LẺ

Thí dụ 1. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình:* $x^2 - 2y^2 = 5$ (1)

Lời giải. Vì x, y nguyên nên từ phương trình (1) suy ra x là số lẻ. Thay $x = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) vào (1) ta được $4k^2 + 4k + 1 - 2y^2 = 5$

$$\Leftrightarrow 2(k^2 + k - 1) = y^2 \Rightarrow y \text{ là số chẵn.}$$

Đặt $y = 2t$ ($t \in \mathbb{Z}$) ta có $2(k^2 + k - 1) = 4t^2$

$$\Leftrightarrow k^2 + k - 1 = 2t^2 \Leftrightarrow k(k + 1) = 2t^2 + 1 (*)$$

Vì $k(k + 1)$ là số chẵn mà $2t^2 + 1$ là số lẻ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy PT (1) vô nghiệm.

Thí dụ 2. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + x^2 + x + y) = 105 \quad (2)$$

(Trích đề thi HSG lớp 9 TP. Hà Tĩnh, năm học 2006 - 2007)

Nhận xét. Ở bài này ta thấy vế trái là tích của hai số nguyên mà vế phải là số lẻ nên nó phải là tích của hai số nguyên lẻ nên ta có thể sử dụng tính chẵn lẻ để giải như sau:

Lời giải. Vì 105 là số lẻ nên $2x + 5y + 1, 2^{|x|} + x^2 + x + y$ là các số lẻ. Suy ra y là số chẵn,

mà $x^2 + x = x(x + 1)$ là số chẵn nên $2^{|x|}$ là số lẻ $\Leftrightarrow x = 0$. Thay $x = 0$ vào (2) ta được $(5y + 1)(y + 1) = 105 \Leftrightarrow 5y^2 + 6y - 104 = 0 \Leftrightarrow y = 4$ (vì y là số chẵn). Do đó $y = 4$. Vậy PT có nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 4)$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$|19x + 5y| + 1975 = |19y + 5x| + 2016^x \quad (3)$$

Lời giải. Biến đổi phương trình (3) ta được: $1975 - 2016^x = (|19y + 5x| + 19y + 5x) - (|19x + 5y| + 19x + 5y) + 14(x - y)$.

Vì $|a| + a$ là số chẵn với mọi giá trị nguyên của a nên vế phải là số chẵn do đó $1975 - 2016^x$ phải là số chẵn $\Rightarrow 2016^x$ là số lẻ $\Rightarrow x = 0$.

Thay $x = 0$ vào phương trình (3) ta được

$$|5y| + 1975 = |19y| + 1 \Leftrightarrow 14|y| = 1974$$

$$\Leftrightarrow y = 141 \text{ hoặc } y = -141.$$

Vậy PT có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 141)$ và $(0; -141)$.

Thí dụ 4. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x + x^2 + x^3 = 4y^2 + 4 \quad (4)$$

Lời giải. Ta có: $(4) \Leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 = 4y^2 + 4y + 1$
 $\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 1) = (2y + 1)^2 \quad (*)$

Dễ thấy $(2y + 1)^2$ lẻ $\Rightarrow x + 1$ và $x^2 + 1$ là hai số lẻ. Giả sử $(x + 1, x^2 + 1) = d \Rightarrow d$ lẻ.

Mặt khác $x + 1 : d \Rightarrow 1 - x^2 : d$, kết hợp với $x^2 + 1 : d$ ta có $1 - x^2 + 1 + x^2 : d \Rightarrow 2 : d$

$$\Rightarrow d = 1 \quad (\text{vì } d \text{ lẻ}).$$

Vì $(x + 1)(x^2 + 1)$ là số chính phương (theo (*)), và $(x + 1, x^2 + 1) = 1$ nên $x + 1$ và $x^2 + 1$ đều là số chính phương. Dễ thấy x^2 và $x^2 + 1$ là 2 số tự nhiên liên tiếp mà đều là số chính phương nên

$x = 0$. Khi đó theo (4) thì $y = 0$ hoặc $y = -1$.
 Nghiệm của PT là: $(0; 0); (0; -1)$.

Nhận xét. Ta đã sử dụng tính chẵn lẻ, tính chất chia hết và tính chất của số chính phương để giải bài toán đã cho.

Thí dụ 5. Chứng tỏ phương trình:

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + k^4 = 2015$$

không có nghiệm nguyên.

Lời giải. Nếu x là số chẵn thì $x^4 : 16$.

Nếu x là số lẻ thì $x^2 : 8$ dư 1 nên

$$x^4 = (8k + 1)^2 : 16 \text{ dư } 1.$$

Như vậy mỗi số x^4, y^4, z^4, t^4 chia cho 16 dư 1 hoặc 0 nên $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + k^4$ chia cho 16 có số dư không lớn hơn 5 còn về phải 2015 chia cho 16 dư 15. Vậy PT không có nghiệm nguyên.

2. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHIA HẾT

Thí dụ 6. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên $x; y; z$ thỏa mãn

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z + 2017 \quad (6)$$

Lời giải. (6) $\Leftrightarrow (x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z) = 2017$. Vì $x^3 - x = (x - 1)x(x + 1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6, tương tự $y^3 - y; z^3 - z$ cũng chia hết cho 6 nên vế trái chia hết cho 6 mà 2017 không chia hết cho 6 nên PT (6) vô nghiệm.

Vậy không tồn tại các số nguyên $x; y; z$ thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z + 2017$.

Thí dụ 7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y - 5x^2 - xy - x + y - 1 = 0$ (7).

(Trích đề thi HSG lớp 9 huyện Can Lộc, Hà Tĩnh)

Nhận xét. Đây là phương trình 2 ẩn mà bậc đối với y là bậc nhất nên ta dễ dàng biểu thị y theo x và ta có cách giải như sau:

Lời giải. (7) $\Leftrightarrow y = \frac{5x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ (do $x^2 - x + 1 > 0$)

$$\Rightarrow y = 5 + \frac{6x - 4}{x^2 - x + 1}.$$

Ta có $y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (6x - 4) : (x^2 - x + 1)$

$$\Leftrightarrow 2(3x - 2) : (x^2 - x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 : (x^2 - x + 1) \\ 3x - 2 : (x^2 - x + 1) \end{cases}$$

(vì $x^2 - x + 1 = x(x - 1) + 1$ là số lẻ).

• TH1: $2 : (x^2 - x + 1)$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = \pm 1 \text{ (vì } x^2 - x + 1 \text{ lẻ)}$$

$$\Leftrightarrow x = 0; x = 1 \text{ (thỏa mãn } x \text{ nguyên).}$$

+ Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

+ Với $x = 1 \Rightarrow y = 7$.

• TH2: $(3x - 2) : (x^2 - x + 1)$ (*)

$$\Rightarrow x(3x - 2) : (x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow (3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow (3x^2 - 3x + 3 + x - 3) : (x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow (x - 3) : (x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow (3x - 9) : (x^2 - x + 1) \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta được $7 : (x^2 - x + 1)$

$\Rightarrow x^2 - x + 1$ bằng một trong các giá trị $-7; 7; 1; -1$. Từ đây ta được các nghiệm: $(3; 7), (0; 1), (1; 7)$. Thử lại ta thấy PT (7) có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(3; 7), (0; 1), (1; 7)$.

Thí dụ 8. Tồn tại hay không số nguyên n thỏa mãn $n^3 + 2015n = 2014^{2016} + 1$?

Lời giải. Giả sử tồn tại số nguyên n thỏa mãn phương trình $n^3 + 2015n = 2014^{2016} + 1$, suy ra:

$$n^3 - n + 2016n = 2014^{2016} + 1$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)n(n + 1) + 2016n = 2014^{2016} + 1.$$

Do $(n - 1)n(n + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3 và 2016: 3 nên

$$n^3 - n + 2016n : 3 \text{ hay } n^3 + 2015n : 3.$$

Mặt khác 2014 chia 3 dư 1 nên 2014^{2016} chia 3 dư 1 $\Rightarrow 2014^{2016} + 1$ chia 3 dư 2.

Từ đó ta thấy điều mâu thuẫn. Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn PT

$$n^3 + 2015n = 2014^{2016} + 1.$$

Thí dụ 9. *Tồn tại hay không hai số nguyên dương a và b thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2013$?*

Lời giải. Giả sử tồn tại hai số nguyên dương a và b thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2013$.

Ta có $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Vì $a^3 + b^3 = 2013 \div 3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \div 3$

$$\Leftrightarrow (a + b)^3 \div 3 \Rightarrow a + b \div 3 \Rightarrow (a + b)^3 \div 9$$

$$\Rightarrow 2013 = a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \div 9 \text{ (vô lý).}$$

Vậy không tồn tại hai số nguyên dương a và b thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2013$.

Thí dụ 10. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$x^2(x - y) = 5(y - 1) \quad (10)$$

Lời giải. Ta có (10) $\Leftrightarrow x^2(x - y) = 5(y - 1) + 5(x - 1) \Leftrightarrow (x^2 + 5)(x - y) = 5(x - 1)$.

Suy ra $5(x - 1) \div (x^2 + 5) \Rightarrow 5(x^2 + 5) - 5x(x - 1) - 5(x - 1) \div (x^2 + 5)$ hay $30 \div (x^2 + 5)$

$\Rightarrow (x^2 + 5) \in \{5; 6; 10; 15; 30\}$ và x là số nguyên $\Rightarrow x \in \{0; \pm 1; \pm 5\}$. Thử lại ta được nghiệm nguyên của PT là $(0; 1); (1; 1); (-5; -4)$.

Thí dụ 11. *Chứng minh phương trình*

$$x^2 - 2^y = 2015 \quad (11)$$

không có nghiệm nguyên.

Lời giải. (11) $\Leftrightarrow x^2 = 2015 + 2^y$.

Ta sẽ chứng minh $A = 2015 + 2^y$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên y . Thật vậy thay y bằng 0; 1; 2 thì A lần lượt nhận các giá trị là 2016; 2017; 2019 đều không phải là số chính phương.

Với $y \geq 3$ thì 2^y chia hết cho 8, còn 2015 chia 8 dư 7 nên A chia 8 dư 7 mà số chính phương lẻ chia 8 chỉ có thể dư 1 do đó A không phải là số chính phương. Vậy PT (11) không có nghiệm nguyên.

Thí dụ 12. *Tìm các số nguyên dương a, b sao cho*

$$\frac{4}{a} + \sqrt[3]{4 - b} = \sqrt[3]{4 + 4\sqrt{b} + b} + \sqrt[3]{4 - 4\sqrt{b} + b} \quad (12)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[3]{2 + \sqrt{b}} = x; \sqrt[3]{2 - \sqrt{b}} = y$.

Nhận xét. Vì $b > 0$ nên $x > 0$. Ta có

$$xy = \sqrt[3]{2 + \sqrt{b}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{b}} = \sqrt[3]{4 - b}; x^3 + y^3 = 4.$$

Do đó phương trình (12) trở thành:

$$\frac{x^3 + y^3}{a} + xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^3 + y^3}{a} = x^2 + y^2 - xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x + y)(x^2 + y^2 - xy)}{a} = x^2 + y^2 - xy$$

$$\text{mà } x^2 + y^2 - xy = \frac{3}{4} x^2 + \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 > 0 \text{ suy ra}$$

$$x + y = a \Rightarrow \sqrt[3]{2 + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{b}} = a \quad (*)$$

$$\Rightarrow 4 + 3\sqrt[3]{4 - b} \cdot a = a^3 \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow 4 - b = \left(\frac{a^3 - 4}{3a}\right)^3.$$

Vì b là số nguyên nên $a^3 - 4 \div 3a \Rightarrow a^3 - 4 \div a \Rightarrow 4 \div a \Rightarrow a \in \{1; 2; 4\}$.

- Với $a = 1 \Rightarrow b = 5$.

- Với $a = 2$ hoặc $a = 4$ thì b không phải là số nguyên dương.

Thử lại: Với $a = 1; b = 5$ ta có (**) đúng tức là

$$x^3 + y^3 + 3xya = a^3 \Leftrightarrow a^3 - x^3 - y^3 - 3xya = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - x - y)[(a + x)^2 + (a + y)^2 + (x - y)^2] = 0.$$

Do $x > 0; a > 0$ nên $x + a > 0 \Rightarrow (a + x)^2 + (a + y)^2 + (x - y)^2 > 0 \Rightarrow a - x - y = 0$ hay $a = x + y$, tức là (*) đúng. Vậy $(a; b) = (1; 5)$ là cặp số nguyên dương duy nhất thỏa mãn PT (12).

Thí dụ 13. *Tìm số tự nhiên n thỏa mãn*

$$361(n^3 + 5n + 1) = 85(n^4 + 6n^2 + n + 5) \quad (13)$$

Lời giải. Ta có (13) $\Leftrightarrow \frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{85}{361}$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5}$ là phân số tối giản với mọi giá trị $n \in \mathbb{N}$.

Thật vậy, đặt $d = (n^3 + 5n + 1; n^4 + 6n^2 + n + 5)$.

Suy ra $n^4 + 6n^2 + n + 5 - n(n^3 + 5n + 1) \div d$ hay $n^2 + 5 \div d$. Từ đó $(n^3 + 5n + 1) - n(n^2 + 5) \div d$ hay