TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

5 2018

Số 491

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

The School of Athens

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

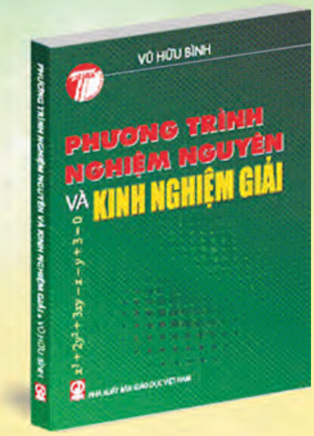
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, …

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra …tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Bưu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

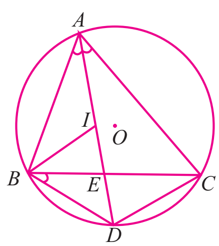
- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

ĐIỀU THÚ VỊ TỪ "GIAO ĐIỂM BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC"
ÁP DỤNG TRONG MỘT SỐ BÀI TẬP VỀ ĐƯỜNG TRÒN

NGÔ VĂN ĐIỀM
(GV THCS Lê Ninh, Kinh Môn, Hải Dương)

Trong chương trình môn Toán lớp 9, kiến thức về đường tròn được nhắc đến nhiều trong các đề thi. Bài viết này, xin chia sẻ cùng bạn đọc *Điều thú vị từ giao điểm ba đường phân giác của tam giác, áp dụng trong một số bài tập về đường tròn*. Ta xét bài toán gốc: *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O); tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại E, cắt đường tròn (O) tại D ($D \neq A$), điểm I trên đoạn AE. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi $DB = DC = DI$.*

Hướng dẫn giải



Ta có AD là tia phân giác của góc $\widehat{BAC} \Leftrightarrow DB = DC$

$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$);

$$\widehat{BID} = \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{ABI}$$

(góc ngoài của ΔABI);

$$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD} = \widehat{IBC} + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

$DB = DI \Leftrightarrow \Delta DBI$ cân tại $D \Leftrightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{ABI} = \widehat{IBC} + \frac{\widehat{A}}{2}$

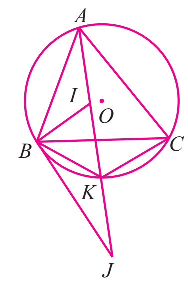
$\Leftrightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBC} \Leftrightarrow BI$ là phân giác của $\widehat{ABC} \Leftrightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Nhận xét. Điều thú vị từ tính chất trên là "*I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi $DB = DC = DI$*" được vận dụng trong một số bài tập về đường tròn, nếu không để ý đến sẽ khó khăn cho việc phân tích, tìm tòi lời giải của bài toán. Sau đây, ta sẽ vận dụng tính chất này để giải một số bài tập sau:

Bài tập 1. *Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Tia AI cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$), gọi J là điểm đối xứng của I qua K. Chứng minh rằng: tam giác IJB vuông tại B.*

(Trích câu 4-Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên KHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh năm học 2004-2005).

Hướng dẫn giải



Vì I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC \Rightarrow KB = KI = KC$ (theo bài toán gốc).

Xét ΔIBJ có

$$KB = KI = KJ = \frac{1}{2}IJ,$$

suy ra ΔIBJ vuông tại B.

Nhận xét. *Trong lời giải trên ta đã nhờ vào tính chất " Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC suy ra $KB = KC = KI$ " (theo bài toán gốc).*

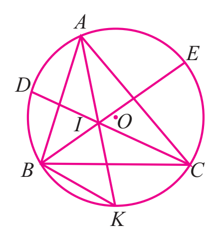
Tiếp tục ta vận dụng tính chất trên để giải bài toán "hay" và khó hơn sau:

Bài tập 2. *Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R) (BC không đi qua tâm O), A là điểm chuyển động trên cung lớn BC; D, E lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ BA, CA; I là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng:*

a) I nằm trên một đường tròn cố định.

b) Xác định vị trí của A để AI có độ dài lớn nhất.

Hướng dẫn giải. a) Ta có



$\widehat{ABE} = \widehat{CBE}$ (hai góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau), $\Rightarrow BE$ là tia phân giác $\widehat{ABC}$.

Tương tự CD là tia phân giác $\widehat{ACB}$. Gọi giao điểm của AI với đường tròn (O) là K ($K \neq A$), vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC suy ra AK là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ suy ra K cố định.

Mặt khác $KB = KI = KC$ (theo bài toán gốc) mà K cố định, B cố định nên độ dài đoạn KB không đổi. Vậy I chuyển động trên đường tròn (K; KB) cố định.

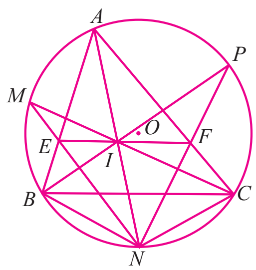
b) Ta có $AI = AK - KI = AK - KB$ mà KB không đổi nên để AI max $\Leftrightarrow AK$ max $\Leftrightarrow AK$ là đường kính $\Leftrightarrow A$ là điểm đối xứng với K qua O.

Nhận xét. Đến đây bước đầu ta đã thấy được "*điều* *thú vị*" từ tính chất của giao điểm ba đường phân giác của tam giác, áp dụng trong một số bài tập về đường tròn. Sau đây, chúng ta sẽ tìm hiểu sự thú vị của tính chất trên ở một số bài tập ở mức độ khó hơn:

Bài tập 3. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P theo thứ tự là các điểm chính giữa của các cung* $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$; *E là giao điểm của MN với AB, F là giao điểm của NP với AC và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh ba điểm E, I, F thẳng hàng.*

Hướng dẫn giải. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, AI cắt đường tròn (O) tại N $(N \neq A)$

$\Rightarrow NB = NI$ (theo bài toán gốc).



Chứng minh tương tự:

$$MB = MI$$

Suy ra MN là đường trung trực của $BI \Rightarrow EB = EI$

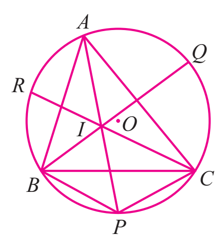
$\Rightarrow \widehat{EIB} = \widehat{ABP} = \widehat{CBP} \Rightarrow IE \,//\, BC$. Chứng minh tương tự có $IF \,//\, BC$. Suy ra ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Bài tập 4. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), gọi P, Q, R lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ BC, CA, AB; I là giao điểm của BQ và CR. Chứng minh rằng:*

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA.$$

Hướng dẫn giải. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, tia AI cắt đường tròn tại P nên $PB = PI = PC$

$\Rightarrow 2PI = PB + PC > BC.$



Chứng minh tương tự:

$$2QI = QA + QC > AC$$

$$2RI = RA + RB > AB$$

$$\Rightarrow PI + QI + RI > \frac{BC + AC + AB}{2}.$$

Ta có:

$$AP + BQ + CR = AI + IP + BI + IQ + CI + IR$$

$$= (PI + QI + RI) + \frac{AI + IC}{2} + \frac{AI + IB}{2} + \frac{IB + IC}{2}$$

$$> \frac{BC + AC + AB}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2}.$$

Vậy $AP + BQ + CR > AB + BC + CA.$ (đpcm)

Bài tập 5. *Gọi I và O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC không đều. Chứng minh rằng:* $\widehat{AIO} \leq 90^0 \Leftrightarrow 2BC \leq AB + CA.$

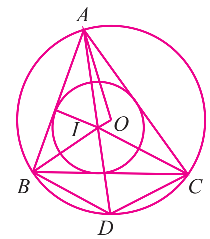
Hướng dẫn giải.

Kéo dài AI cắt đường tròn (O) tại D. Ta chứng minh được: $DB = DI = DC$ (theo bài toán gốc).

Áp dụng Định lý Ptolemy cho tứ giác $ABDC$ nội tiếp ta được:

$$AB.DC + AC.BD = AD.BC$$

$$\Rightarrow DI(AB + AC) = AD.BC$$



Ta có $\widehat{AIO} \leq 90^0 \Leftrightarrow AI \geq ID \Leftrightarrow (AD - ID) \geq ID$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{AD}{DI} = \frac{AB + AC}{BC} \Leftrightarrow 2BC \leq AB + AC. \text{(đpcm)}$$

Bài tập 5. (*IMO 2006*). *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I; Gọi P là một điểm trong tam giác nhọn ABC thỏa mãn:*

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB} \ (*).$$

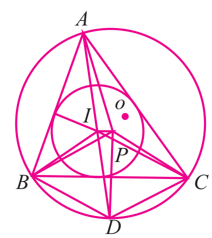
Chứng minh rằng: $AP \geq AI$, *đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hướng dẫn giải

Gọi D là giao điểm của AI với đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC $(D \neq A)$. Ta có:

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \hat{B} + \hat{C},$$

hay $2(\widehat{PBC} + \widehat{PCB}) = \hat{B} + \hat{C}.$



Ta có

$$\widehat{BPC} = 180^0 - (\widehat{PBC} + \widehat{PCB})$$

$$= 180^0 - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2}.$$

Mặt khác $\widehat{BIC} = 90^0 + \dfrac{\hat{A}}{2}$ nên $\widehat{BPC} = \widehat{BIC}$, suy ra

B, P, I, C cùng nằm trên một đường tròn. (1)

Mà I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, tia AI cắt đường tròn (O) tại $D \Rightarrow DB = DC = DI$. (2)

(theo bài toán gốc).

Từ (1) và (2) suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BIPC \Rightarrow DI = DP$. Ta có:

$$AP + PD \geq AD = AI + ID$$

$\Rightarrow AP \geq AI$, đẳng thức xảy ra khi $P \equiv I$.

Mời các bạn tiếp tục khai thác "*Điều thú vị từ giao điểm ba đường phân giác của tam giác, áp dụng trong một số bài tập về đường tròn*" để thấy được cái hay, cái đẹp trong toán học.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN BÌNH LONG, BÌNH PHƯỚC n¨m häc 2017-2018

VÒNG 1

Câu 1. 1. $A=\sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1.$

$$B=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4.$$

2. a) $$V=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}-2}.$$

b) $V=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{x}-2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=64$ (thỏa mãn).

Câu 2. 1. a) Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y=2x^2$	8	2	0	2	8

x	0	-1
$y=x+1$	1	0

b) Vì $d_1\,//\,d$ nên phương trình đường thẳng d_1 có dạng: $y=x+b\,(b\neq 1)$. Mà d_1 đi qua $A(-1;2)$ nên ta có

$$-1+b=2\Rightarrow b=3\Rightarrow d_1: y=x+3.$$

2. $$\begin{cases}3x-2y=5\\2x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5\\4x+2y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=21\\2x+y=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\2x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là (3; 2).

Câu 3. 1. a) Với $m=2$, ta có $2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=1.$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 khi và chỉ khi $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow -2\leq m\leq 2$. Theo Viet, ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=m & (1)\\ x_1.x_2=\dfrac{m^2-2}{2} & (2)\end{cases}$$

Theo đề bài ta có: $A=\left|2x_1x_2-x_1-x_2-4\right|$

$$=\left|m^2-2-m-4\right|=\left|(m-3)(m+2)\right|.$$

Do $-2\leq m\leq 2$ nên $m+2\geq 0$, $m-3\leq 0$. Suy ra

$$A=(m+2)(-m+3)=-m^2+m+6$$

$$=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\leq\frac{25}{4}.$$

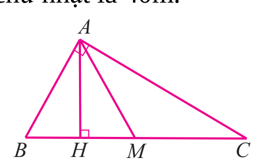
Vậy $\text{Max } A=\frac{25}{4}$ khi $m=\frac{1}{2}$.

2. Gọi x (m) là chiều rộng của vườn hoa, $x>0$. Chiều dài của vườn hoa là $x+6$ (m). Theo đề bài ta có: $x(x+6)=91\Leftrightarrow x^2+6x-91=0$

$$\Leftrightarrow(x-7)(x+13)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=7 & \text{(nhận)}\\ x=-13 & \text{(loại)}\end{array}\right.$$

Vậy chu vi vườn hoa hình chữ nhật là 40m.

Câu 4. a) Xét ΔABC có:



$\hat{A}=90^0$, $AH\perp BC$

$\Rightarrow AH=\sqrt{BH.CH}$

$=\sqrt{4.9}=6$ cm.

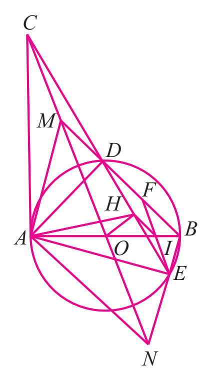
ΔABH : $\hat{H}=90^0\Rightarrow\tan B=\frac{AH}{BH}=\frac{6}{4}\Rightarrow\hat{B}\approx 56,3^0.$

b) Xét ΔABC có:

$\hat{A}=90^0, MB=MC\Rightarrow AM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\cdot 13=6,5$ cm.

Vậy $S_{\Delta AHM}=\frac{1}{2}MH.AH=\frac{1}{2}.2,5.6=7,5$ cm^2.

Câu 5. a) Ta có: $\widehat{CAB}=90^0$, $\widehat{OHC}=90^0\Rightarrow\widehat{CAB}+\widehat{OHC}=180^0.$



Vậy tứ giác $AOHC$ nội tiếp.

b) $\widehat{CAD}=\widehat{AEC}$ và $\widehat{ACE}$ chung

$\Rightarrow\Delta ACD\backsim\Delta ECA$ (g.g)

$\Rightarrow\frac{CA}{CE}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow AC.AE=AD.CE.$

c) Từ E vẽ đường thẳng song song với MN cắt cạnh AB tại I và cắt cạnh BD tại F $\Rightarrow\widehat{HEI}=\widehat{HCO}.$

Vì tứ giác $AOHC$ nội tiếp

$\Rightarrow\widehat{HAO}=\widehat{HCO}=\widehat{HEI}\Rightarrow$ tứ giác $AHIE$ nội tiếp

$\Rightarrow\widehat{IHE}=\widehat{IAE}=\widehat{BDE}\Rightarrow HI\,//\,BD.$

Mà H là trung điểm của DE suy ra I là trung điểm của EF. Lại có $EF\,//\,MN$ và $IE=IF$