



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

7 2018
Số 493

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự: (024) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



Nhà Toán học Robert Langlands (Canada) nhận Giải thưởng Abel 2018 từ Vua Harald V (Na Uy)



TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lý lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh *Bổ đề cơ bản trong Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ để giải quyết hơn, cách “đưa

khó về dễ, đưa lạ về quen”, cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ... tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Buu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

● Điện thoại biên tập: 024.35121607

● Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606

● Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.



PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ TRONG LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

ĐỖ QUANG MINH

(GV THCS Nguyễn Bá Ngọc, An Xuân, Tuy An, Phú Yên)

Các bài toán hình học thường được giải bằng phương pháp hình học thuần túy. Tuy nhiên ta còn có thể vận dụng phương pháp đại số để giải các bài toán nói trên. Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu cách vận dụng phương pháp đại số vào giải một số dạng toán hình học.

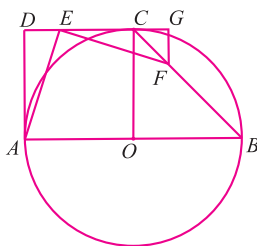
1. Vận dụng phương pháp đại số vào dạng bài tập tính toán

Trong dạng bài tập này, chúng ta thực hiện các bước sau:

- Chọn ẩn, đặt điều kiện cho ẩn.
- Biểu diễn các đại lượng hình học chưa biết, đã biết thông qua ẩn.
- Dựa vào các hệ thức hình học đã biết để lập phương trình, hệ phương trình.
- Giải PT, hệ PT để tìm nghiệm.
- Chọn nghiệm thích hợp rồi trả lời.

Thí dụ 1. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$, C là một điểm chính giữa cung $\widehat{AB}$. Hai tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và C cắt nhau ở D . Trên đoạn DC lấy điểm E sao cho $DE = \frac{1}{3}DC$. Trên đoạn BC lấy điểm F sao cho $EF = EA$. Kẻ FG vuông góc với đường thẳng DC ($G \in DC$). Tính độ dài đoạn thẳng CG theo R (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, năm học 2017 – 2018, Tỉnh Phú Yên).

Lời giải. Từ giả thiết suy ra tứ giác $OADC$ là hình vuông và tam giác CGF vuông cân tại G .



Đặt $CG = GF = x$, với $0 < x < R$. Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ADE , EGF và kết hợp với $AE = EF$ ta có:

$$AE^2 = EF^2 \Leftrightarrow R^2 + \frac{R^2}{9} = \left(\frac{2}{3}R + x\right)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2Rx - R^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$$

(loại nghiệm $x = -R$). Vậy $CG = \frac{R}{3}$.

Thí dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A có đường trung tuyến AM và đường phân giác BD sao cho $BD = 2AM$. Tính số đo $\widehat{BAC}$.

Lời giải. Gọi N là trung điểm của AB thì $MN \parallel AC$ và MN cắt BD tại trung điểm I của $BD \Rightarrow ID = AM \Rightarrow$ tứ giác $ADMI$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{MAC} = \widehat{MAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Khi đó, đặt $\widehat{BAC} = 2x$, với $0^\circ < x < 90^\circ$ thì

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 90^\circ - x \text{ và } \widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \frac{90^\circ - x}{2}$$

Kết hợp với tính chất của góc ngoài tam giác, ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{CBD} + \widehat{ACB}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2x = \frac{90^\circ - x}{2} + 90^\circ - x \Leftrightarrow x = 54^\circ.$$

Vậy $\widehat{BAC} = 2 \times 54^\circ = 108^\circ$.

Thí dụ 3. Cho ΔABC có diện tích 1 m^2 . Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM = 3BM$ và $AN = 4CN$. Tính diện tích các tam giác AOB và AOC .

Lời giải. Đặt $S_{AOB} = x$; $S_{AOC} = y$, với $0 < x, y < 1$.

Vì $AM = 3BM$, nên $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{S_{AOM}}{S_{AOB}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{AOM} = \frac{3}{4} S_{AOB} = \frac{3}{4} x.$$

Tương tự, ta cũng tính được $S_{AON} = \frac{4}{5} y$.

Kết hợp với:

$$S_{ABN} = S_{AOB} + S_{AON} = x + \frac{4}{5} y$$

$$\text{và } S_{ABN} = \frac{4}{5} S_{ABC} = \frac{4}{5}, \quad \text{B} \quad \text{M} \quad \text{O} \quad \text{N} \quad \text{C}$$

$$\text{ta có } x + \frac{4}{5} y = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5x + 4y = 4 \quad (1)$$

Lập luận tương tự, ta cũng có:

$$\begin{aligned} S_{AOC} + S_{AOM} &= S_{ACM} \Leftrightarrow y + \frac{3}{4} x = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow 3x + 4y = 3 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có hệ PT } \begin{cases} 5x + 4y = 4 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Giải hệ PT } (*), \text{ ta được nghiệm } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{8} \end{cases}$$

(thỏa mãn).

$$\text{Vậy } S_{AOB} = \frac{1}{2} m^2, \quad S_{AOC} = \frac{3}{8} m^2.$$

2. Vận dụng phương pháp đại số vào dạng bài tập chứng minh họ đường thẳng đi qua điểm cố định

Kiến thức vận dụng

• Phương trình họ đường thẳng (Δ_m) có dạng $m.f(x, y) + h(x, y) = 0$. Khi đó họ đường thẳng (Δ_m) luôn đi qua điểm cố định có tọa độ là

$$\text{nghiệm của hệ PT } \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ h(x, y) = 0 \end{cases}$$

• Hai đường thẳng $(d): y = ax + b$, $(d'): y = a'x + b'$ vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a.a' = -1$.

Thí dụ 1. Cho góc vuông xOy . Một hình chữ nhật $OABC$ có chu vi không đổi sao cho A, C là hai điểm thay đổi thuộc tia Ox, Oy . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. Giả sử chu vi hình chữ nhật $OABC$ là $2a$ (với a có độ dài không đổi). Ta lập hệ tọa độ vuông góc có trục hoành chứa Ox và trục tung chứa Oy . Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Nếu tọa độ điểm $A(m; 0)$ thì tọa độ các điểm $C(0; 1-m)$; $B(m; 1-m)$, với $m \neq 0$ và $m \neq 1$. Ta có PT đường thẳng (AC) có dạng:

$$y = -\frac{1-m}{m}x + 1-m$$

$\Rightarrow$ PT đường thẳng (Δ_m) đi qua B và vuông góc

với đường thẳng (AC) là: $y = \frac{m}{1-m}x + \frac{1-2m}{1-m}$

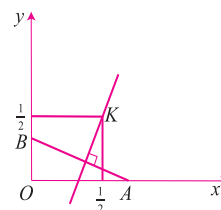
$$\Leftrightarrow m(x + y - 2) + (1 - y) = 0, \quad \text{với } m \neq 0 \text{ và } m \neq 1.$$

Từ đó họ đường thẳng (Δ_m) đi qua B và vuông góc với đường thẳng (AC) luôn đi qua điểm cố định I có tọa độ là nghiệm của hệ PT:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Thí dụ 2. Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B chuyển động trên Ox, Oy sao cho $OA + OB = a$ (a là độ dài cho trước). Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. Ta lập hệ tọa độ vuông góc có trục hoành chứa Ox và trục tung chứa Oy . Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Nếu tọa độ điểm $A(m; 0)$ thì tọa



độ điểm $B(0;1-m)$, với $m \neq 0$.

Khi đó PT đường trung trực (d_m) của đoạn thẳng AB có dạng:

$$(x-m)^2 + (y-0)^2 = (x-0)^2 + (y-(1-m))^2.$$

$$\Leftrightarrow 2m(x+y-1) + (1-2y) = 0.$$

Vậy họ đường thẳng (d_m) luôn đi qua điểm cố định K có tọa độ là nghiệm của hệ PT

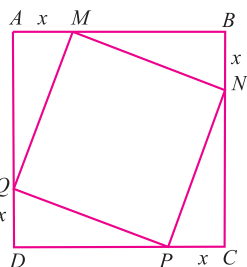
$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 1-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$$

3. Vận dụng phương pháp đại số vào dạng bài tập cực trị hình học

Kiến thức được vận dụng trong dạng bài tập này là các bất đẳng thức *Cauchy*, *Bunyakovsky*, ...

Thí dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$. Tìm vị trí của điểm M sao cho tứ giác $MNPQ$ có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải. Dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình vuông, suy ra chu vi tứ giác $MNPQ$ có chu vi nhỏ nhất khi và chỉ khi MQ nhỏ nhất. Đặt $AM = x$, với $0 < x < a$.



Khi đó $AQ = MB = a - x$.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AMQ , ta có:

$$MQ^2 = AM^2 + AQ^2 = x^2 + (a-x)^2$$

$$\geq \frac{1}{2}[x + (a-x)]^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow MQ \geq \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ (không đổi).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB . Vậy khi M là trung điểm của AB

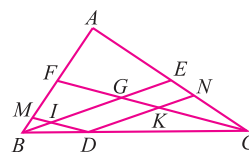
thì chu vi tứ giác $MNPQ$ có giá trị nhỏ nhất là $2a\sqrt{2}$.

Thí dụ 2. Cho ΔABC có các đường trung tuyến BE và CF cắt nhau ở G . Gọi D là một điểm trên cạnh BC . Qua D kẻ đường thẳng song song với CF , cắt BE và BA theo thứ tự ở I và M . Qua D kẻ đường thẳng song song với BE , cắt CF và CA theo thứ tự ở K và N . Tìm vị trí của điểm D trên cạnh BC để tứ giác $GIDK$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải. Đặt

$$\begin{cases} BD = x \\ CD = y \end{cases} \Rightarrow x + y = BC$$

(với $0 < x, y < BC$).



Từ giả thiết có $S_{GBC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ (không đổi) và các tam giác IBD, GBC, KDC đồng dạng suy ra

$$\frac{S_{GIDK}}{S_{GBC}} = \frac{S_{GBC} - S_{IBD} - S_{KDC}}{S_{GBC}} = 1 - \left(\frac{x}{BC}\right)^2 - \left(\frac{y}{BC}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2}$$

Từ đó S_{GIDK} lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2}$ nhỏ nhất.

$$\text{Lại có: } 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y \Leftrightarrow BD = CD \Leftrightarrow D$ là trung điểm của BC . Vậy khi D là trung điểm của BC thì diện tích tứ giác

$GIDK$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{6}S_{ABC}$.

4. Vận dụng phương pháp đại số vào dạng bài tập quỹ tích

Kiến thức vận dụng: Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$,

$B(x_B; y_B)$ và $I(x; y)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB thì