TÔN THÂN (Chủ biên)
PHẠM THỊ LỆ HẰNG – NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

CÁC CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 9

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Để giúp các em học sinh học tập tốt môn Toán ở Trung học cơ sở (THCS) hiện nay và ở Trung học phổ thông (THPT) sau này, chúng tôi biên soạn bộ sách gồm 8 cuốn : "*Các chuyên đề chọn lọc Toán 6, 7, 8, 9 tập một và tập hai*".

Mỗi cuốn trong bộ sách có các chương tương ứng với các chương trong sách giáo khoa Toán. Các chương đều được viết theo những chuyên đề (cơ bản và nâng cao) mà các tác giả cho rằng đó là những chuyên đề cần thiết cho việc học và hiểu sâu kiến thức của chương.

Mỗi chuyên đề gồm ba phần:

A. Kiến thức cần nhớ: Phần này đưa ra những kiến thức cơ bản, những kiến thức bổ sung cần thiết để có thể giải được các bài tập, các dạng toán của chuyên đề.

B. Một số ví dụ: Phần này trình bày những ví dụ chọn lọc, minh hoạ cho những dạng toán điển hình của chuyên đề với cách trình bày lời giải chuẩn mực kèm theo những *nhận xét*, *lưu ý*, *bình luận*,... về phương pháp giải, về các sai lầm học sinh có thể mắc, về việc tìm tòi thêm các cách giải khác,.... Nhiều ví dụ ở phần này được trích trong các đề thi học sinh giỏi Toán ở THCS, trong các đề thi vào lớp 10 THPT chuyên.

C. Bài tập: Phần này đưa ra hệ thống các bài tập được phân loại theo các dạng toán để học sinh dễ sử dụng. Hệ thống các bài tập này khá đa dạng, bao gồm các bài tập cơ bản và các bài tập nâng cao cho học sinh khá, giỏi. Nhiều bài được trích từ các đề thi học sinh giỏi Toán ở trong và ngoài nước. Mỗi cuốn sách đều cung cấp một số lượng lớn các bài tập với hướng dẫn giải khá chi tiết, minh hoạ cho phương pháp giải các dạng toán, các chuyên đề đã đề cập.

Cuối sách là phần *Hướng dẫn giải - Đáp số* cho các bài tập ở các chuyên đề. Qua những hướng dẫn giải cụ thể, học sinh sẽ nắm rõ hơn cách giải cho mỗi dạng toán.

Các kiến thức trong mỗi cuốn sách được sắp xếp từ dễ đến khó, được trình bày đơn giản, dễ hiểu, đáp ứng cho nhiều đối tượng học sinh.

Các tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã có nhiều kinh nghiệm trong việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở THCS, đó là các thầy cô giáo:

PGS.TS. NGND Tôn Thân (Chủ biên bộ sách), NGƯT Bùi Văn Tuyên, NGƯT Nguyễn Ngọc Đạm, Ths. Nguyễn Đức Trường, Ths. Nguyễn Đức Tấn, Ths. Nguyễn Anh Hoàng, Ths. Đặng Văn Quản, Ths. Phạm Thị Lệ Hằng.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song bộ sách khó tránh khỏi những thiếu sót. Các tác giả rất mong nhận được thư góp ý của các em học sinh, các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh. Mọi ý kiến góp ý xin gửi về theo địa chỉ :

Ban Toán - Tin, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - 187B Giảng Võ - Hà Nội.

Hi vọng rằng, bộ sách sẽ là tài liệu tham khảo thiết thực, hữu ích đối với các em học sinh THCS, các thầy cô giáo dạy Toán và bạn đọc yêu thích Toán.

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG III

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

CHUYÊN ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

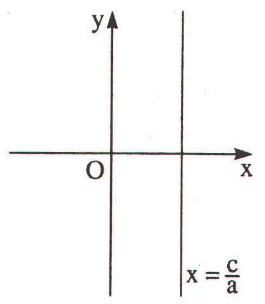
– Định nghĩa

Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng tổng quát $ax + by = c$ (1), trong đó a, b và c là các số cho trước $(a \neq 0$ hoặc $b \neq 0)$, x và y gọi là các ẩn số.

Trong phương trình (1), nếu gán $x = x_0$; $y = y_0$ ta được đẳng thức đúng thì cặp số $(x_0\,;\,y_0)$ được gọi là nghiệm của phương trình (1).

– Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

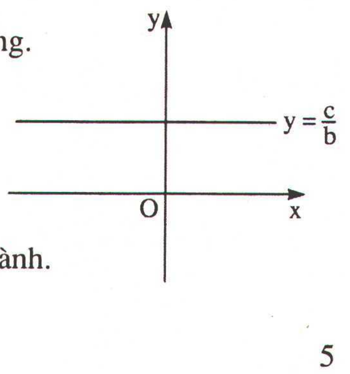
Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng (d): $ax + by = c$.



+ Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{a} \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$$

và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung.



+ Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

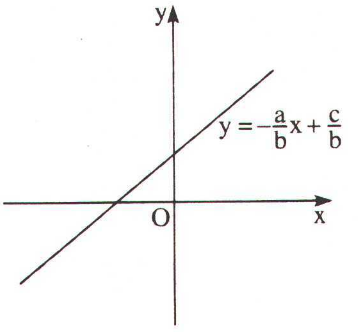
và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành.

+ Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

và đường thẳng (d) là đồ thị của hàm số

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$



B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho phương trình: $3x + 2y = 5$ (1).

a) Các cặp số $(-1 ; 2)$, $(3 ; 5)$, $(0 ; 1)$, $(1 ; 1)$ có phải là nghiệm của phương trình đã cho hay không ?

b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (1).

c) Tìm b để các cặp số $(2 ; b)$, $(-1 ; b^2)$ là nghiệm của phương trình.

Giải

a) Xét cặp số $(-1 ; 2)$, thay $x = -1$; $y = 2$ vào phương trình $3x + 2y = 5$.

Ta có : $3.(-1) + 2.2 = 5$ (vô lí).

Suy ra cặp số $(-1 ; 2)$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Tương tự, ta lần lượt thử các cặp số $(3 ; 5)$, $(0 ; 1)$, $(1 ; 1)$ thì thấy $(1 ; 1)$ thoả mãn phương trình $3x + 2y = 5$ nên $(1 ; 1)$ là nghiệm.

b) Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2} \end{cases}$

hay $\left(x; \dfrac{-3x+5}{2}\right)$ với $x \in \mathbf{R}$.

c) Để cặp số $(2 ; b)$ là nghiệm của phương trình thì $x = 2$; $y = b$ thoả mãn (1)

$\Leftrightarrow 3.2 + 2.b = 5 \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy với $b = -\dfrac{1}{2}$ thì $(2 ; b)$ là nghiệm của phương trình (1).

Tương tự, để cặp số $(-1 ; b^2)$ là nghiệm của phương trình thì $x = -1$; $y = b^2$ thoả mãn (1) $\Leftrightarrow 3.(-1) + 2.b^2 = 5 \Leftrightarrow 2.b^2 = 8 \Leftrightarrow b^2 = 4$.

Suy ra $b = -2$; $b = 2$.

Vậy với $b = -2$; $b = 2$ thì cặp số $(-1 ; b^2)$ là nghiệm của phương trình (1).

Nhận xét: Muốn xét xem cặp số $(x_0; y_0)$ có phải là nghiệm của một phương trình bậc nhất hai ẩn thì ta thay $x = x_0$; $y = y_0$ vào phương trình đã cho. Nếu thấy thoả mãn thì kết luận $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Ngược lại thì kết luận $(x_0; y_0)$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

a) $2x + 5y = 3$. (2)

b) $3x + 6y = 8$. (3)

Giải

Bổ sung:

Để làm được bài toán này, ta cần sử dụng định lí sau:

– Định lí 1: Xét phương trình $ax + by = c$ (*), trong đó a, b, c nguyên; $a \neq 0; b \neq 0$. Ta có phương trình (*) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow$ c chia hết cho ước chung lớn nhất của a và b.

– Định lí 2: Cho phương trình $ax + by = c$ (**), trong đó a, b, c nguyên; $a \neq 0$; $b \neq 0$ và $(a; b) = 1$. Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình (**) thì phương trình (**) có vô số nghiệm nguyên và mọi nghiệm nguyên của nó đều có thể biểu diễn dưới dạng: $\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$ $(t \in \mathbf{Z})$.

Ta gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm riêng (bằng cách nhẩm và thử chọn).

a) Xét phương trình (2), ta thấy $(2 ; 5) = 1$.

Ta tìm được một nghiệm riêng của (2) là $x = -1$; $y = 1$.

Khi đó nghiệm nguyên của phương trình (2) là $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{Z})$.

b) Xét $3x + 6y = 8$ (3)

Ta thấy $(3; 6) = 3$ mà 8 không chia hết cho 3 nên phương trình (3) không có nghiệm nguyên.

Nhận xét: Bài toán trong ví dụ 2 có thể nói theo cách khác là hãy tìm các cặp điểm có toạ độ nguyên trên đường thẳng $ax + by = c$.

C. BÀI TẬP

3.1. Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $xy + x = 3$; b) $2x - y = 0$;

c) $x + y = xy$; d) $x^2 + y = 7$;

e) $0x - 3y = 5$; g) $4x + 0y = 9$;

h) $\frac{x}{y} + y = 9$.

3.2. Các cặp số $(-3 ; 2)$, $(6 ; 2)$, $(0 ; -1)$, $(1 ; -1)$, $(5 ; 7)$ có là nghiệm của phương trình $3x-5y = 8$ không ?

3.3. Tìm công thức nghiệm tổng quát của mỗi phương trình sau:

a) $2x + 3y = 5$; b) $0.x + 7y = 8$;

c) $-2x + 0y = 1$; d) $-2x + 5y = 7$;

e) $\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = \sqrt{3}$.

3.4. Hãy biểu diễn tập nghiệm của các phương trình sau trên cùng một hệ toạ độ :

a) $0x + 3y = -6$; b) $-2x + y = 5$; c) $2x - 0y = 6$.

3.5. a) Vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của các phương trình sau trên cùng một hệ toạ độ :

$$2x + y = 1; \quad 3x - 2y = -9;$$

b) Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng đó. Chứng tỏ rằng toạ độ giao điểm là nghiệm chung của hai phương trình đã cho.

3.6. Tìm giá trị của a để đường thẳng $ax + 3y = 10$ đi qua điểm $A(1 ; 5)$.

3.7. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) $2x + 3y = 7$; b) $5x + 20y = 21$.

CHUYÊN ĐỀ 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VÀ CÁCH GIẢI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

* Khái niệm về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn :

– Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng : $(I)\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$

trong đó $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

– Nghiệm của hệ phương trình là nghiệm chung của hai phương trình (1) và (2). Nếu hai phương trình này không có nghiệm chung thì hệ (I) vô nghiệm.

– Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

* Minh hoạ hình học:

– Cặp số thoả mãn cả hai phương trình (1) và (2) là toạ độ điểm phải đồng thời nằm trên cả hai đường thẳng (1) và (2). Vậy chúng là toạ độ điểm chung của hai đường thẳng (1) và (2).

– Hai đường thẳng (1) và (2) có thể xảy ra:

+ Cắt nhau tại 1 điểm: Hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất.

+ Song song với nhau: Hệ phương trình (I) vô nghiệm.

+ Trùng nhau: Hệ phương trình (I) vô số nghiệm.

* Hệ phương trình tương đương:

Hai hệ phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm, nghĩa là mỗi nghiệm của hệ phương trình này cũng là nghiệm của hệ phương trình kia và ngược lại.

* Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số:

– Nhân hai vế của hai phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho hệ số của ẩn cùng tên trong hai phương trình bằng nhau hay đối nhau.

– Sử dụng phương pháp cộng đại số để được hệ phương trình mới trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0.

– Giải hệ phương trình vừa thu được.

* Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế:

– Từ một trong các phương trình của hệ biểu diễn x theo y (hoặc y theo x).

– Dùng kết quả đó thế cho x (hoặc cho y) trong phương trình còn lại rồi thu gọn.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ (I)

a) Giải hệ phương trình trên với m = 3.

b) Tìm m để hệ phương trình (I) vô nghiệm.

Giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ (I)

a) Với m = 3 thì (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

Tìm được $x = \frac{6}{5}$; $y = \frac{13}{5}$.

b) Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} mx - (5 - 2x) = 1 \\ y = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2x = 6 \\ y = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(m + 2) = 6 \\ y = 5 - 2x. \end{cases}$

Để hệ phương trình (I) vô nghiệm thì $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 4y = m - 1 \\ x + my = 3. \end{cases}$

Giải

Xét hệ phương trình (I) $\begin{cases} mx + 4y = m - 1 & (1) \\ x + my = 3 & (2) \end{cases}$

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} m(3 - my) + 4y = m - 1 \\ x = 3 - my \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(m^2 - 4) = 2m + 1 \\ x = 3 - my \end{cases} \quad (*)$$

+) $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2, m \neq -2$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$y = \frac{1 + 2m}{m^2 - 4};\ x = \frac{m^2 - m - 12}{m^2 - 4}.$$

+) $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2; m = -2$:

Với m = 2 thì 0.y = 5 suy ra phương trình (*) vô nghiệm nên hệ phương trình (I) vô nghiệm.

Với m = –2 thì 0.y = –3 suy ra phương trình (*) vô nghiệm nên hệ phương trình (I) vô nghiệm.

Vậy với $m \neq 2, m \neq -2$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$y = \frac{1 + 2m}{m^2 - 4};\ x = \frac{m^2 - m - 12}{m^2 - 4}.$$

Với $m = 2; m = -2$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{y^2 + 1} = 5 \\ \dfrac{3}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{y^2 + 1} = 10 \end{cases}$ (I)

Giải

Điều kiện xác định $x \neq \pm 1$.

Đặt $u = \dfrac{1}{x^2 - 1}; v = \dfrac{1}{y^2 + 1}$. (*)

Khi đó (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2u - v = 5 \\ 3u + v = 10 \end{cases}$ (II)

Tìm được u = 3, v = 1 là nghiệm của hệ phương trình (II).

Thay vào (*) ta tìm được $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; y = 0.

Vậy $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};0\right);\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}};0\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

C. BÀI TẬP

3.8. Hãy lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có một phương trình là 2x – y = 5 và hệ :

a) Có nghiệm duy nhất.

b) Không có nghiệm.

c) Có vô số nghiệm.

3.9. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -3x + 2y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 2x + 3y = 4. \end{cases}$

3.10. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 5(x - y) - 3(2x + 3y) = 12 \\ 3(x + 2y) - 4(x + 2y) = 5 \end{cases}$ (I)

b) $\begin{cases} \dfrac{2x + 3}{y - 1} = \dfrac{4x + 1}{2y + 1} \\ \dfrac{x + 2}{y - 1} = \dfrac{x - 4}{y + 2} \end{cases}$ (II)

3.11. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = \sqrt{2} \\ x - \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x - y} + \dfrac{1}{x + y} = 12 \\ \dfrac{7}{x - y} + \dfrac{2}{x + y} = 33. \end{cases}$

3.12. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 2x - y = n \end{cases}$ nhận cặp số (1; 1) làm nghiệm ?

3.13. Không giải hệ phương trình, hãy nhận xét số nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x - y = -1 \\ 8x - 2y = -2. \end{cases}$

3.14. a) Hãy giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$ (I)

b) Minh hoạ hình học nghiệm của hệ phương trình (I).

3.15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ mx + y = 2 \end{cases}$ (I). Với giá trị nào của m thì hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất ? Vô nghiệm ? Hệ có thể có vô số nghiệm được không ?

3.16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + ay = 5 \\ x + 4ay = 2 \end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình với a = 2.

b) Tìm các giá trị của a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

3.17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ ax + y = 3 \end{cases}$ (I)

a) Giải hệ phương trình với a = –1.

b) Tìm các giá trị của a để hệ phương trình (I) có vô số nghiệm.

3.18. Cho ba đường thẳng

$x - 2y = 5 \qquad (d_1)$

$2x + y = -10 \qquad (d_2)$

$3x + y = m \qquad (d_3)$

Hãy xác định m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

3.19. Xác định a và b để đồ thị của hàm số y = ax + b đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau :

a) A(–1; 3), B(2; 0) ;

b) A(3; 3), B(1; 2).

3.20. Bằng cách biểu diễn x và y theo z, hãy tìm x, y, z từ hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ 2y - z = 5 & (2) \\ z + 3x = 2 & (3) \end{cases}$$

3.21. Cho hệ phương trình hai ẩn x, y với m là tham số:

$$\begin{cases} mx - y = 2 & (1) \\ (2 - m)x + y = m & (2) \end{cases}$$

1. Giải hệ phương trình với $m = -\sqrt{3}$.

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét hai đường thẳng có phương trình (1) và (2).

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng (1) đi qua điểm cố định B và đường thẳng (2) đi qua điểm cố định C.

b) Tìm m để giao điểm A của hai đường thẳng thoả mãn điều kiện góc BAC vuông. Tính diện tích tam giác ABC ứng với giá trị đó của m.

(Đề thi vào trường THPT Chu Văn An và Hà Nội- Amsterdam – vòng 1, năm 2002 – 2003)

CHUYÊN ĐỀ 3

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình ta có thể tiến hành theo các bước sau :

Bước 1. Lập hệ phương trình

– Chọn ẩn (thường là các đại lượng cần tìm) và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn.

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.

– Lập hệ hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ phương trình vừa lập.

Bước 3. Kiểm tra xem các nghiệm của hệ có thoả mãn điều kiện đặt ra, rồi trả lời.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình*

Hai đội trồng cây gây rừng trong tháng trước trồng được 700 cây. Trong tháng này đội A vượt mức 60% và đội B vượt mức 40%. Tính xem mỗi đội trong tháng trước trồng được bao nhiêu cây. Biết rằng trong tháng này cả hai đội trồng được 1100 cây.

Giải

Gọi số cây đội A trồng được trong tháng trước là x (cây), x nguyên dương ; số cây đội B trồng được trong tháng trước là y (cây), y nguyên dương.

Do tháng trước cả hai đội trồng được 700 cây nên ta có phương trình :

$$x + y = 700. \qquad (1)$$

Trong tháng này đội A vượt mức được số cây là : $\frac{60}{100}.x$ (cây).

Trong tháng này đội B vượt mức được số cây là : $\frac{40}{100}.y$ (cây).

Số cây trồng được của hai đội trong tháng này hơn tháng trước là :

$$1100 - 700 = 400 \text{ (cây)}.$$

Ta có phương trình : $\frac{60}{100}.x + \frac{40}{100}.y = 400.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 700 \\ \frac{60}{100}x + \frac{40}{100}y = 400. \end{cases}$

Giải hệ được nghiệm $\begin{cases} x = 600 \\ y = 100 \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy trong tháng trước đội A trồng được 600 cây, đội B trồng được 100 cây.

Ví dụ 2. Một người đi từ A đến B gồm hai đoạn đường AC và CB hết thời gian 4 giờ 30 phút. Tính quãng đường AC, CB. Biết rằng vận tốc của người đó đi trên đoạn đường AC là 30 km/h, đi trên đoạn đường CB là 20 km/h và AC dài hơn CB là 10km.

Giải

Đổi 4 giờ 30 phút = 4,5 (giờ).

Gọi thời gian người đó đi đoạn đường AC là x (giờ), $x > 0$;

thời gian người đó đi đoạn đường CB là y (giờ), $y > 0$.

Vì người đó đi từ A đến B gồm hai đoạn đường AC và CB hết thời gian 4 giờ 30 phút nên ta có phương trình : $x + y = 4,5$. (1)

Đoạn đường AC dài là : 30.x (km).

Đoạn đường CB dài là : 20.y (km).

Vì AC dài hơn CB là 10km nên ta có phương trình : $30x - 20y = 10$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 4,5 \\ 30x - 20y = 10. \end{cases}$

Giải hệ được nghiệm : $x = 2$, $y = 2,5$.

Vậy AC dài 2.30 = 60km ;

BC dài 2,5.20 = 50km.

Ví dụ 3. Tìm số có hai chữ số biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5 và số đó gấp 8 lần tổng các chữ số của nó.

Giải

Gọi chữ số hàng chục là x ($0 < x \leq 9$, $x \in \mathbf{N}$) ;

Chữ số hàng đơn vị là y ($0 \leq y \leq 9$, $y \in \mathbf{N}$).

Do chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5 nên ta có phương trình :

$$x - y = 5. \quad (1)$$

Vì số đó gấp 8 lần tổng các chữ số của nó nên ta có : $\overline{xy} = 8.(x + y)$

$$\Leftrightarrow 10.x + y = 8x + 8y. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 7y = 0. \end{cases}$

Giải ra được $x = 7$; $y = 2$.

Số phải tìm là 72.

Ví dụ 4. Hai đội công nhân cùng làm xong một công việc thì hết 12 giờ. Nếu hai đội cùng làm trong 8 giờ thì đội một nghỉ, đội hai tiếp tục làm với năng suất gấp đôi thì sau 3 giờ 30 phút nữa mới làm xong. Hỏi mỗi đội nếu làm một mình thì hết bao nhiêu thời gian ?

Giải

Gọi thời gian đội 1 và đội 2 làm một mình xong công việc lần lượt là x và y (giờ), $x, y > 12$.

Trong 1 giờ, đội 1 làm được $\frac{1}{x}$ (công việc) ;

Trong 1 giờ, đội 2 làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Vì hai đội công nhân cùng làm xong một công việc thì hết 12 giờ nên trong 1 giờ, cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$ (công việc).

Ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$.

Theo đề bài ta có trong 8 giờ đầu, hai đội làm được $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ (công việc).

Trong 3 giờ 30 phút sau đó đội 2 tiếp tục làm với năng suất gấp đôi năng suất cũ nên ta có phương trình : $\frac{2}{y}.\frac{7}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = 21$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ y = 21. \end{cases}$

Giải hệ phương trình tìm được x = 28, y = 21 (thoả mãn điều kiện đề bài).

Vậy thời gian đội 1 và đội 2 làm một mình hết công việc lần lượt là 28 giờ và 21 giờ.

C. BÀI TẬP

3.22. Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi 150m. Nếu chiều rộng tăng thêm 10m và chiều dài tăng thêm 5m thì diện tích sẽ tăng thêm $650m^2$. Tìm các kích thước ban đầu của miếng đất.

3.23. Có hai tổ sản xuất, tổ I làm trong 20 ngày và tổ II làm trong 15 ngày thì được tất cả 1600 sản phẩm. Biết số sản phẩm tổ I làm trong 4 ngày bằng số sản phẩm tổ II làm trong 5 ngày. Tính số sản phẩm của mỗi tổ đó làm được trong một ngày.

3.24. Cho số tự nhiên có hai chữ số, tổng của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 11. Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 27 đơn vị. Tìm số đã cho.

3.25. Hai xe đi ngược chiều nhau, khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A và B cách nhau 375km và gặp nhau sau 5 giờ. Biết vận tốc xe đi từ A lớn hơn vận tốc xe đi từ B là 15km/h. Tính vận tốc của mỗi xe.

3.26. Bạn Nam có hai chai nước muối A và B. Chai A có nồng độ 20%, chai B có nồng độ 50%. Hỏi cần phải lấy mỗi chai bao nhiêu gam để được 180 gam nước muối có nồng độ 40% ?

3.27. Một phòng họp có 255 ghế ngồi được xếp thành từng hàng và số ghế ở mỗi hàng đều bằng nhau. Nếu số hàng tăng thêm 1 và số ghế ở mỗi hàng tăng thêm 2 thì trong phòng họp sẽ có 306 ghế. Hỏi ban đầu có bao nhiêu hàng, mỗi hàng có bao nhiêu ghế?

CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO 1

HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỰC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hệ phương trình đối xứng hai ẩn

1.1. Định nghĩa: Hệ phương trình đối xứng hai ẩn là hệ phương trình có hai ẩn x, y mà nếu đổi x và y cho nhau thì hệ không thay đổi (nghĩa là vai trò của x và y như nhau).

1.2. Tính chất: Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm.

1.3. Hệ đối xứng loại 1: Nếu đổi x và y cho nhau thì mỗi phương trình của hệ không thay đổi (nghĩa là vai trò của x, y là như nhau trong từng phương trình của hệ).

Cách giải:

– Đặt $S = x + y$, $P = x.y$. Biến đổi đưa về hệ hai ẩn S, P.

– Giải ra S, P rồi dùng định lí Vi-ét đảo để tính x, y.

– Hệ có nghiệm khi và chỉ khi hệ hai ẩn S, P có nghiệm thoả mãn $S^2 \geq 4P$ (là điều kiện để phương trình $t^2 - St + P = 0$ có nghiệm).

1.4. Hệ đối xứng loại 2: Nếu đổi x và y cho nhau thì phương trình này trở thành phương trình kia và ngược lại (do đó hệ không đổi).

Cách giải:

– Trừ từng vế được phương trình đưa được về dạng tích có một nhân tử là $x - y$.

– Tính x theo y (hoặc y theo x) rồi thay vào một trong hai phương trình ban đầu của hệ.

2. Hệ đẳng cấp bậc hai hai ẩn

2.1 Định nghĩa: Hệ đẳng cấp bậc hai hai ẩn là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d'. \end{cases}$$

(vế trái của mỗi phương trình là tổng các đơn thức bậc hai đối với x, y).

Cách giải:

– Khử số hạng tự do được phương trình đẳng cấp thuần nhất $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$.

Có ba cách giải quyết:

+ Đưa về phương trình tích (phân tích vế trái thành nhân tử).

+ Coi đây là phương trình bậc hai ẩn x (hoặc y).

+ Xét y = 0, thử trực tiếp. Xét $y \neq 0$, chia cả hai vế cho y^2 và đặt $t = \frac{x}{y}$ thì được phương trình bậc hai ẩn t (có thể là tương tự với x). Từ đó tính được x theo y (hoặc y theo x) để thay vào một trong hai phương trình ban đầu của hệ.

3. Hệ hỗn hợp

– Nếu từ một (hoặc một số) phương trình của hệ có thể tính được x theo y (hoặc y theo x): phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai ẩn x (hoặc ẩn y), phương trình đưa được về dạng tích (ví dụ: đẳng cấp thuần nhất),...

– Tính x theo y (hoặc y theo x) rồi thế vào phương trình còn lại.

4. Hệ phương trình có thể giải được bằng phương pháp đặc biệt: Đánh giá, sử dụng bất đẳng thức,...

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy = -1 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$ (I)

Giải

Đặt S = x + y; P = x.y.

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} S + P = -1 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -1 - S \\ S^2 - 2(-1 - S) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -1 - S \\ S^2 + 2S - 3 = 0. \end{cases}$

Tìm được $S_1 = 1$; $S_2 = -3$. Suy ra $P_1 = -2$; $P_2 = 2$.

• Với $S_1 = 1$ và $P_1 = -2$, ta có $\begin{cases} x + y = 1 \\ x.y = -2 \end{cases}$, ta tìm được x = 2; y = –1 hoặc x = –1; y = 2.

• Với $S_2 = -3$ và $P_2 = 2$, ta có $\begin{cases} x + y = -3 \\ x.y = 2 \end{cases}$, tìm được x = –1; y = –2 hoặc x = –2; y = –1.

Vậy nghiệm (x;y) của hệ phương trình là: (2; –1), (–1; –2), (–1; 2), (–2; –1).

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^2x = 5 \\ y^3 + x^2y = 5. \end{cases}$

Giải

Ta nhận thấy x = y = 0 không là nghiệm của hệ phương trình.

Trừ vế với vế hai phương trình, ta được $x^3 - y^3 + y^2x - x^2y = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) - xy(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2) = 0.$

• x = y: thay vào hệ phương trình ta được $x = y = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

• $x^2 + y^2 = 0$ suy ra x = y = 0 (do $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$).

Do x = y = 0 không là nghiệm nên hệ phương trình đã cho có nghiệm (x;y) là

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}; \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right).$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 5 = 0. \end{cases}$

Giải

Dễ thấy x = y = 0 không là nghiệm của hệ.

Đặt $t = \frac{y}{x}$ suy ra y = tx (với $x \neq 0$).

Ta có:

$$\begin{cases} x^2 - 3tx^2 + 2t^2x^2 = 0 \\ 2x^2 - 3tx^2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1 - 3t + 2t^2) = 0 \\ 2x^2 - 3tx^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3t + 2t^2 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 3tx^2 + 5 = 0 & (2) \end{cases} \text{(do } x \neq 0\text{)}.$$

Giải (1) tìm được t = 1; $t = \frac{1}{2}$.

• Với t = 1 thì x = y, thay vào (2) tìm được $x = y = \pm\sqrt{5}$.